

**AL 1 - Lavoro guidato**  
Giovedì 5 ottobre 2006

1. Sia  $A = \{a, b\}$ .
  - (a) Determinare l'insieme delle parti di  $A$
  - (b) Determinare  $A \cap \mathcal{P}(A)$ .
  
2. Siano  $A, B$  insiemi.
  - (a) Dimostrare che  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .
  - (b) Mostrare con un esempio che si può avere  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ .
  - (c) Dimostrare che  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ .
  
3. Siano  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$ . Determinare  $A \times B$ ,  $B \times A$  e  $(A \times B) \cap (B \times A)$ .
  
4. Dimostrare che per ogni terna di insiemi  $A, B, C$  si ha  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .
  
5. Sia  $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Determinare il grafico delle seguenti relazioni:
  - (a)  $a\rho_1b$  se e soltanto se  $a$  divide  $b$ .
  - (b)  $a\rho_2b$  se e soltanto se  $a + b = 5$ .
  - (c)  $a\rho_3b$  se e soltanto se  $a - b = 5$ .
  
6. Sia  $X = \{-6, -4, -2, 1, 3, 5\}$ . Determinare il grafico delle seguenti relazioni:
  - (a)  $a\rho_1b$  se e soltanto se  $ab \geq 0$ .
  - (b)  $a\rho_2b$  se e soltanto se sono entrambi pari o entrambi dispari.

Confrontare  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

7. Determinare quali fra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva sono soddisfatte dalle seguenti relazioni:

(a)  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $x\rho y$  se e soltanto se 5 divide  $x - y$ .

(b) Sia  $A$  un insieme. Per ogni  $E, F \in \mathcal{P}(A)$ ,  $E\rho F$  se e soltanto se  $E \subseteq F$ .

(c)  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x\rho y$  se e soltanto se  $\text{MCD}(5, x) = \text{MCD}(5, y)$

(d) Sia  $A$  un insieme non vuoto. Per ogni  $E, F \in \mathcal{P}(A)$ ,  $E\rho F$  se e soltanto se  $E \cap F = \emptyset$ .

8. Sia  $\rho$  una relazione su un insieme  $X$ . Sia  $\rho^{-1}$  la relazione su  $X$  così definita:

$$a\rho^{-1}b \Leftrightarrow b\rho a.$$

Confrontare il grafico di  $\rho$  e di  $\rho^{-1}$ . Che cosa succede quando  $\rho$  soddisfa la proprietà simmetrica?

Determinare il grafico di  $\rho^{-1}$  per le relazioni definite nell'esercizio 5.

9. Dimostrare che se una relazione  $\rho$  su un insieme  $X$  è simmetrica e antisimmetrica allora il suo grafico  $G$  è contenuto nella diagonale di  $X \times X$  (cioè nell'insieme  $\Delta = \{(x, x), x \in X\}$ ). Dimostrare che se  $\rho$  soddisfa anche la proprietà simmetrica allora  $\rho$  è la relazione di uguaglianza.