Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
24 Settembre 2004

1 Operazioni

1. Dimostrare che qualunque sia l'insieme S, le applicazioni

$$\cap : (X,Y) \in P(S) \times P(S) \to X \cap Y \in P(S)$$

$$\cup : (X,Y) \in P(S) \times P(S) \to X \cup Y \in P(S)$$

   sono delle operazioni in $P(S)$ associative, commutative. Inoltre verificare se $\cap$ è distributiva rispetto a $\cup$, o/e viceversa.

2. Determinare quali dei sistemi $(G, *)$ qui descritti sono gruppi. In caso negativo dire quali degli assiomi di gruppo non sono verificati.

   - $G = \mathbb{Z}$ con $a * b = a - b$
   - $G = \mathbb{N}$ con $a * b = ab$
   - G = insieme dei numeri razionali con denominatore dispari, $a*b = a + b$
   - $G = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ con
     - $a_i * a_j = a_{i+j}$ se $i + j < 7$
     - $a_i * a_j = a_{i+j-7}$ se $i + j \geq 7$.

3. Sia $M_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici 2×2 a valori reali con le seguenti operazioni: dati $a = (a_{ij})$ e $b = (b_{ij})$ si ha

   (a) $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$
   (b) $a \cdot b = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j})$
   (c) $a \star b = a \cdot b - b \cdot a$

   Verificare se

   (a) $(M_2(\mathbb{R}), +)$ è un gruppo.
   (b) $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   (c) $(M_2(\mathbb{R}), \star)$ è un gruppo.
   (d) $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello.
   (e) $(M_2(\mathbb{R}), +, \star)$ è un anello.
   (f) $(M_2(\mathbb{R}), \star, \cdot)$ è un anello.

2 Gruppi

1. Sia G un insieme non vuoto, chiuso rispetto a un prodotto che sia associativo e che soddisfi inoltre le seguenti condizioni:

   (a) Esiste un elemento e tale che $a * e = a$ per ogni $a \in G$

   (b) Dato $a \in G$ esiste un elemento $y(a) \in G$ tale che $a * y(a) = e$

   Dimostrare allora che G è un gruppo rispetto a questo prodotto.

2. Supponiamo che G sia un insieme finito chiuso rispetto ad un prodotto associativo, e che valgano entrambe le leggi di cancellazione. Dimostrare che G è un gruppo.

3. Usando il risultato dell'esercizio 2 dimostrare che:

   (a) gli interi modulo p primo, diversi da 0, sono un gruppo rispetto alla moltiplicazione modulo p

   (b) gli interi coprimi con n sono un gruppo rispetto alla moltiplicazione modulo n.

4. Calcolare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$,$\mathbb{Z}_{15}$ e $\mathbb{Z}_{21}$.

5. Trovare l'intersezione dei sottogruppi $3\mathbb{Z}$ e $7\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Z}, +)$.

6. Consideriamo $\mathbb{Z}_n$ con le usuali operazioni, determinare se i seguenti elementi sono zero divisori o invertibili

   (a) Per $n = 7$, $\overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}$

   (b) Per $n = 13$, $\overline{4}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}$

   (c) Per $n = 15$, $\overline{3}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{13}$

   (d) Per $n = 21$, $\overline{4}, \overline{7}, \overline{12}, \overline{15}$

   (e) Per $n = 51$, $\overline{2}, \overline{12}, \overline{17}, \overline{31}$

7. Trovare il gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_{51}$.

3 Gruppo Simmetrico

1. Calcolare tutti i sottogruppi di S_3.

2. Determinare le orbite e i cicli delle seguenti permutazioni:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Scrivere le permutazioni del problema 2 come prodotto di cicli disgiunti.

4. Dimostrare che il più piccolo sottogruppo di S_n che contiene (1 2) e (1 2 ... n) è S_n.

5. Determinare tutti i sottogruppi di Klein di S_3 e S_4.

6. In S_5 trovare una permutazione per ogni struttura ciclica seguente:

   (a) (-)
   (b) (- -)(- -)
   (c) (- -)
   (d) (- -)(- - -)
   (e) (- - -)
   (f) (- - - -)
   (g) (- - - - -)

7. Trovare un elemento di ordine 2, 3 e 4 in S_4.

4 Numeri complessi

1. *Notazione Trigonometrica:* Dato un numero complesso $z = a + ib$, dimostrare che esistono $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ tali che

$$z = \rho\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

   Inoltre se $z \neq 0$, ρ e θ sono unici.

2. *Notazione Esponenziale:* Dato $\theta \in \mathbb{R}$ definiamo

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$$

   Dimostrare che per ogni α e β

   (a) $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+\beta}$
   (b) $e^{i\alpha+2k\pi} = e^{i\alpha}$

   Inoltre ogni numero complesso z si pu scrivere nella forma

$$z = \rho e^{i\theta}$$

   con $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$

3. *Radici dell'unità* $z \in \mathbb{C}$ si dice radice n-esima dell'unità se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$z^n - 1 = 0$$

Fissato n dimostrare che:

(a) Ogni radice n-esima dell'unità è della forma $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ per $k = 0, 1 \ldots n-1$

(b) L'insieme delle radici n-esime dell'unità forma un gruppo di ordine n.

Una radice n-esima dell'unità si dice *primitiva* se genera il gruppo delle radici n-esime dell'unità. Dimostrare che $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ è primitiva se e solamente se $mcd\,(k, n) = 1$.