Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
26 Novembre 2004

1 Anelli e Ideali

1. Dati due anelli R e R', introdurre una struttura di anello nel prodotto cartesiano $R \times R'$.
2. Sia R un anello tale che $a^2 = a$ $\forall a \in R$; dimostrare che R è commutativo.
3. Siano I e J due ideali di un anello R tali che $I \cap J = \{0\}$; dimostrare che, $\forall h \in I$ e $\forall k \in J$, risulta $hk = 0$.
4. Si studi la relazione di inclusione nell'insieme degli ideali degli anelli $\mathbb{Z}_{101}$ e $\mathbb{Z}_{90}$; dire quali fra gli ideali sono massimali e quali minimali. Determinare i quozienti relativi agli ideali massimali e minimali.
5. Se F è un campo dimostrare che i suoi soli ideali sono quelli banali.

2 Ideali

1. Sia R un anello, I un ideale di R e $1 \in I$ allora $I = R$
2. Sia R un anello commutativo e $a \in R$
   (a) dimostrare che $aR = \{ar : r \in R\}$ è un ideale bilatero di R.
   (b) dimostrare con un esempio che ciò può non essere vero se R non è commutativo.
3. Dimostrare che tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono della forma $n\mathbb{Z}$.
4. Dimostrare che $n\mathbb{Z}$ è un ideale primo se e solo se n è primo o $n = 0$.
5. Sia I un ideale di $\mathbb{Z}$ non nullo. Dimostrare che I è primo $\Leftrightarrow$ I è massimale.
6. *Teorema Cinese dei resti* Siano $I_1, \cdots, I_n$ ideali di R, anello commutativo con identità, tali che $I_i + I_j = R$ per ogni $i \neq j$. Siano $x_1, \cdots, x_n \in R$, allora esiste $x \in R$ tale che $x \equiv x_i \mod I_i$. Verificare che per $R = \mathbb{Z}$ si ottiene l'usuale teorema cinese dei resti.
7. Consideriamo

(a) $\mathbb{Z}_{30}$ e $R = \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\right\} \subset \mathbb{Z}_{30}$.

(b) $\mathbb{Z}_{20}$ e $R = \left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}\right\} \subset \mathbb{Z}_{20}$.

Stabilire, in entrambi i casi, se R è un sottoanello, ha divisori dello zero, oppure è un campo. Trovare un anello ad esso isomorfo.

3 Anelli e Anelli di polinomi

1. Dimostrare che, se R un anello commutativo con identità, anche $R\,[x]$ lo è.

2. Dimostrare che $R\,[x_1, \cdots, x_n] = R\,[x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}]$ con $(i_1, \cdots, i_n)$ una permutazione di $(1, \cdots, n)$

3. Dimostrare che l'ideale generato da x in $\mathbb{Z}\,[x]$ non è massimale; è primo ?

4. Dimostrare che l'ideale generato da x in $\mathbb{R}\,[x]$ è massimale.

5. Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché l'ideale generato da x sia massimale in $R\,[x]$.

6. Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché l'ideale generato da x sia primo in $R\,[x]$.

4 Omomorfismi e Quozienti

1. Consideriamo l'applicazione

$$\pi_0 : \mathbb{C}\,[x] \to \mathbb{C}$$

definita da

$$\pi_0(f(x)) = f(0).$$

Verificare che π_0 è un omomorfismo di anelli per ogni $a \in \mathbb{C}$. Trovare il nucleo e l'immagine.

2. Consideriamo l'applicazione

$$\pi_1 : \mathbb{C}\,[x] \to \mathbb{C}$$

definita da

$$\pi_1(f(x)) = f(1)$$

Verificare che π_1 è un omomorfismo di anelli per ogni $a \in \mathbb{C}$. Trovare il nucleo, l'immagine.

3. Per ogni $a \in \mathbb{C}$ consideriamo l'applicazione
$$\pi_a : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$$
definita da
$$\pi_a(f(x)) = f(a)$$
Verificare che π_a è un omomorfismo di anelli per ogni $a \in \mathbb{C}$. Trovare il nucleo, l'immagine.

4. Sia $a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, consideriamo l'applicazione
$$p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$$
definita da
$$p(a_n x^n + \cdots + a_0) = a_n (i)^n + \cdots a_0$$
Stabilire che p è un omomorfismo di anelli. Trovare il nucleo e l'immagine.

5. Sia R un anello con identità 1 e ϕ un omomorfismo di anelli da R a R' surriettivo, dimostrare che $\phi(1)$ è l'unità di R'.

6. Consideriamo $I =< x >$ ideale di $\mathbb{Q}[x]$. Determinare il quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$.

7. Consideriamo $I =< x^2 + 1 >$ ideale di $\mathbb{R}[x]$. Determinare il quoziente $\mathbb{R}[x]/I$.