Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Prima prova di valutazione intermedia
7 novembre 2007

*Cognome*__________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici

1. Sia S l'insieme dei numeri reali diversi da -1. Sia $*$ l'applicazione da $S \times S$ ad $\mathbb{R}$ definita da

$$a * b = a + b + ab$$

con $a, b \in S$.

   (a) Provare che $*$ definisce una operazione binaria su S.
   (b) Provare che $(S, *)$ è un gruppo.
   (c) Trovare la soluzione dell'equazione $4 * x * 5 = 9$ in S.
   (d) Provare che $(S, *)$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli $\mathbb{R}^*$.

2. In S_{11} sono date:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 10 & 1 & 2 & 9 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

e

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 5 & 8 & 9 & 11 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se α e β sono coniugate in S_{11}; nel caso lo siano, determinare $\gamma \in S_{11}$ tale che $\beta = \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$.

(b) Stabilire se α e β appartengono a A_{11}; se sì, stabilire se α e β sono coniugate in A_{11}.

3. (a) Determinare tutti gli automorfismi interni del gruppo delle unità dei quaternioni $\mathbb{H}$.

   (b) Stabilire a quale gruppo noto è isomorfo $Int(\mathbb{H})$.

4. Si consideri il seguente sottoinsieme H del gruppo $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Z})$ delle matrici invertibili del terzo ordine ad elementi in $\mathbb{Z}$ (rispetto al prodotto righe per colonne) definito da:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{Z}) \text{ t. c. } 9 \mid a,\, 6 \mid b,\, 4 \mid c \text{ in } \mathbb{Z} \right\}.$$

   (a) Verificare che H è un sottogruppo di $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Z})$.

   (b) Sia $\varphi : H \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da:
   se $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H, \qquad \varphi(A) := (a, c).$

      i. Provare che φ è un omomorfismo di gruppi.

      ii. Trovare il nucleo e l'immagine di φ.

5. Costruire tutti gli omomorfismi non banali da $\mathbb{Z}_{20}$ a $\mathbb{Z}_{25}$; per ciascuno di essi determinare il nucleo e l'immagine ed applicare il Teorema Fondamentale di omomorfismo.