

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Seconda prova di valutazione intermedia
11 gennaio 2008

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici

1. Sia A un anello commutativo ed unitario; un elemento $a \in A$ si dice *nilpotente* se esiste $n > 0$ tale che $a^n = 0$. Sia $\mathcal{N}(A)$ l'insieme degli elementi nilpotenti di A .
 - (a) Provare che $\mathcal{N}(A)$ è un ideale di A detto *nilradicale* o *radicale primo* dell'anello A .
 - (b) Provare che $\mathcal{N}(A)$ è contenuto in ogni ideale primo di A .
 - (c) Trovare $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{180})$.

2. Sia $v : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito nel seguente modo: se $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$

$$v(f(X)) := f(2 + 5i).$$

- (a) Trovare il nucleo e l'immagine di v .
 - (b) Applicare a v il Teorema Fondamentale di omomorfismo.
3. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale

$$I = (4 - 7i, 11 + 2i).$$

- (a) Mostrare che I è principale e determinare un generatore di I .

- (b) Mostrare che $\mathbb{Z}[i]/I$ è un campo. Inoltre determinare esplicitamente i suoi elementi e la sua caratteristica.
4. Si consideri il dominio d'integrità $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.
- (a) Verificare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ non esistono elementi di norma uguale a 2.
 - (b) Verificare che 2 , $1+\sqrt{-7}$ e $1-\sqrt{-7}$ sono elementi irriducibili e non primi in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.
 - (c) Utilizzando il punto precedente, trovare un elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ che ammette due fattorizzazioni in elementi irriducibili non associati.
 - (d) Dimostrare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ si ha che $\text{MCD}(2, 1 + \sqrt{-7}) = 1$ e non sussiste una identità di Bézout.

5. Siano $f_a(X) = X^3 + X^2 + X + a \in \mathbb{Z}_3[X]$ ed $I_a = (f_a(X))$.
- (a) Determinare per quali valori di a in $\mathbb{Z}_3$ l'anello quoziente $R_a = \mathbb{Z}_3[X]/I_a$ è un campo.
 - (b) Mostrare che $(X^5 - X^4) + I_2$ è invertibile in R_2 e calcolare il suo inverso.