Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello A
21 gennaio 2008

*Cognome*____________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici

1. Sia

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

   (a) Verificare che H è un sottogruppo del gruppo $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Z}_2)$ delle matrici invertibili del terzo ordine ad elementi in $\mathbb{Z}_2$ (rispetto al prodotto righe per colonne);

   (b) Dimostrare che H è isomorfo al gruppo diedrale D_4 delle isometrie del quadrato, costruendo esplicitamente un isomorfismo $\varphi : H \longrightarrow D_4$.

2. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}\,; \quad a \mapsto ([a]_6, [a]_{10}).$$

(a) Mostrare che φ è un omomorfismo di gruppi;

(b) Determinare il nucleo e l'immagine di φ;

(c) Definire l'omomorfismo canonico indotto da φ per il Teorema Fondamentale di Omomorfismo.

3. Sia A un anello commutativo unitario. Per ogni ideale I di A, definiamo il *radicale di I* come

$$\sqrt{I} := \{a \in A\,;\ \ \text{esiste } n \geq 1 \text{ tale che } a^n \in I\}.$$

$\sqrt{(0)} := Nil(A)$ si chiama il *nilradicale di A*. Mostrare che

(a) $\sqrt{I}$ è un ideale di A contenente I;

(b) $a \in \sqrt{I}$ se e soltanto se $a + I \in Nil(A/I)$;

(c) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

Calcolare inoltre il radicale dell'ideale $12\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$.

4. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{C}$

$$A := \left\{ \frac{m + n\sqrt{-3}}{2} \; ; \; m, n \in \mathbb{Z}, m \equiv n \mod 2 \right\}.$$

(a) Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{C}$ contenente $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$;

(b) Determinare il gruppo moltiplicativo $\mathcal{U}(A)$ degli elementi invertibili di A;

(c) Verificare che $\mathcal{U}(A)$ è un gruppo ciclico finito e determinare i suoi generatori.

5. Siano $f(X) := X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 1$, $g(X) := X^3 + X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
   (a) Mostrare che l'ideale $I := \langle f(X), g(X) \rangle$ è principale e determinare un suo generatore;
   (b) Stabilire se le classi modulo I dei polinomi $h(X) := X^3 + X$ e $k(X) := X^2 + 2X$ sono invertibili nell'anello quoziente $\mathbb{Z}_3[X]/I$;
   (c) Determinare gli ideali primi e massimali dell'anello $\mathbb{Z}_3[X]/I$.