Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello X
15 settembre 2008

*Cognome*__________________ *Nome*_____________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici

1. Siano G un gruppo, H un gruppo *abeliano* e $\varphi : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi.

   Sia
   $$\psi : G \times G \longrightarrow H$$
   l'applicazione definita da $\psi\left((g_1, g_2)\right) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}$.

   (a) Provare che ψ è un omomorfismo di gruppi.

   (b) Determinare $\ker\psi$ nel caso in cui $G = S_3$ e $\varphi : S_3 \longrightarrow \{1, -1\}$ è il segno di una permutazione, cioé $\varphi(f) = 1$ se f è una permutazione pari e $\varphi(f) = -1$ se f è una permutazione dispari.

2. Siano p numero primo ed $r \in \mathbb{Z}_p$ un elemento fissato. Sia

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ br & a \end{pmatrix} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

(a) Verificare che A è un sottoanello commutativo ed unitario dell'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ ed ha p^2 elementi.

(b) Provare che A è un sottocampo di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ se e solo se r non è un quadrato in $\mathbb{Z}_p$.

(c) Se $p = 11$, determinare per quali $r \in \mathbb{Z}_{11}$ l'anello A è un campo.

(d) Verificare che l'applicazione $\psi : A \longrightarrow Z_p[X]/(X^2 - r)$ definita da $\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ br & a \end{pmatrix}\right) = (a + bX) + (X^2 - r)$ è un isomorfismo di anelli.

3. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale:

$$I = (-1 + 5i,\ 1 + 8i)\,.$$

   (a) Determinare un generatore di I.

   (b) Stabilire se I è primo e/o massimale.

   (c) Sia $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[i]/I$ l'omomorfismo di anelli definito da $\varphi(n) = n + I$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
   Determinare il nucleo e l'immagine di φ ed applicare il Teorema di Omomorfismo.

4. Si considerino nell'anello $\mathbb{Z}_3[X]$ il polinomio

$$f(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 1$$

e l'ideale da esso generato

$$I = (f(X))\,.$$

(a) Stabilire se il polinomio $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[X]$.

(b) Descrivere l'anello $\mathbb{Z}_3[X]/I$.

(c) Stabilire se $(X^7 + 2X^5 + X^2 + 2) + I$ è invertibile in $\mathbb{Z}_3[X]/I$ e, nel caso lo sia, trovarne l'inverso.