Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Prima prova di valutazione intermedia
7 novembre 2007

*Cognome*____________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici

1. Sia S l'insieme dei numeri reali diversi da -1. Sia $*$ l'applicazione da $S \times S$ ad $\mathbb{R}$ definita da

$$a * b = a + b + ab$$

con $a, b \in S$.

   (a) Provare che $*$ definisce una operazione binaria su S.
   (b) Provare che $(S, *)$ è un gruppo.
   (c) Trovare la soluzione dell'equazione $4 * x * 5 = 9$ in S.
   (d) Provare che $(S, *)$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli $\mathbb{R}^*$.

Soluzione: (a) Una operazione binaria su un insieme S è un'applicazione

$$* : S \times S \longrightarrow S\,; \quad (a, b) \mapsto a * b.$$

Basta allora verificare che $a * b = a + b + ab \in S$, per ogni $a, b \in S$. Questo è vero perché, se $a \neq -1$ e $b \neq -1$, risulta $a*b = a+b+ab \neq -1$.

(b) $(S, *)$ è un gruppo perché

(1) $*$ è associativa (semplice verifica); (2) Esiste l'elemento neutro ed è $e := 0$ ($a * 0 = a = 0 * a$, per ogni $a \in a$); (3) Esiste l'inverso (per ogni $a \in S$, posto $b = -a(a+1)^{-1}$, allora $b \in S$ e risulta $a * b = 0 = b * a$).

(c) $x = -2/3$.

(d) L'applicazione $(S, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$; $x \mapsto x + 1$ è un isomorfismo.

2. In S_{11} sono date:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 10 & 1 & 2 & 9 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

e

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 5 & 8 & 9 & 11 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se α e β sono coniugate in S_{11}; nel caso lo siano, determinare $\gamma \in S_{11}$ tale che $\beta = \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$.

(b) Stabilire se α e β appartengono a A_{11}; se sì, stabilire se α e β sono coniugate in A_{11}.

Soluzione: (a) Risulta $\alpha = (1\ 3\ 7)(2\ 4\ 6\ 10\ 8)$, $\beta = (2\ 7\ 9)(1\ 4\ 6\ 8\ 11)$. Poiché α e β hanno la stessa struttura ciclica, allora sono coniugate in S_{11}.

Una permutazione $\gamma \in S_{11}$ tale che $\beta = \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$ è ad esempio $\gamma = (3\ 9\ 10\ 11)(2\ 4\ 6\ 8\ 1\ 7)$.

(b) α e β sono permutazioni pari, quindi appartengono al gruppo alterno A_{11}. Esse sono coniugate in A_{11} se è possibile trovare $\gamma \in A_{11}$.

La permutazione γ determinata in (a) è dispari e quindi non va bene. Tuttavia ad esempio $\eta := (1\ 2)(8\ 11\ 10)(3\ 7\ 9\ 5)$ è pari e $\eta \circ \alpha \circ \eta^{-1} = \beta$.

3. (a) Determinare tutti gli automorfismi interni del gruppo delle unità dei quaternioni $\mathbb{H}$.

(b) Stabilire a quale gruppo noto è isomorfo $Int(\mathbb{H})$.

Soluzione: (a) L'applicazione $\mathbb{H} \longrightarrow Int(\mathbb{H})$; $x \mapsto \gamma_x$ è un omomorfismo di gruppi il cui nucleo è il centro $Z = \{1, -1\}$ di $\mathbb{H}$. Per il teorema fondamentale di omomorfismo si ha allora un isomorfismo

$$\mathbb{H}/Z \longrightarrow Int(\mathbb{H})\,; \quad xZ \mapsto \gamma_x.$$

Poiché $\mathbb{H}/Z = \{Z, iZ, jZ, kZ\}$, risulta $Int(\mathbb{H}) = \{id\,, \gamma_i\,, \gamma_j\,, \gamma_k\}$.

Alternativamente, si possono calcolare esplicitamente tutti gli 8 automorfismi

$$\gamma_x : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}\,; \quad a \mapsto xax^{-1}$$

$x \in \mathbb{H}$, e verificare che $\gamma_x = \gamma_{-x}$, per ogni $x \in \mathbb{H}$.

(b) Poichè ogni classe $xZ \neq Z$ (ovvero ogni $\gamma_x \neq id$) ha ordine 2, allora $Int(\mathbb{H})$ è un gruppo di Klein.

4. Si consideri il seguente sottoinsieme H del gruppo $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Z})$ delle matrici invertibili del terzo ordine ad elementi in $\mathbb{Z}$ (rispetto al prodotto righe per colonne) definito da:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{Z}) \text{ t. c. } 9 \mid a,\ 6 \mid b,\ 4 \mid c \text{ in } \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Verificare che H è un sottogruppo di $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Z})$.

(b) Sia $\varphi : H \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da:

se $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H, \qquad \varphi(A) := (a, c).$

i. Provare che φ è un omomorfismo di gruppi.

ii. Trovare il nucleo e l'immagine di φ.

Soluzione: (a) Siano

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 9x & 6y \\ 0 & 1 & 4z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;; \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 9x' & 6y' \\ 0 & 1 & 4z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

allora

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 9(x-x') & 6(y-y'+6x'z'-6xz') \\ 0 & 1 & 4(z-z') \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Quindi H è un sottogruppo di $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Z})$.

(b, i) Poiché $AB = \begin{pmatrix} 1 & 9(x+x') & * \\ 0 & 1 & 4(z+z') \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora

$$\varphi(AB) = (9(x+x'), 4(z+z')) = (9x, 4z) + (9x', 4z') = \varphi(A) + \varphi(B)$$

(b, ii) $\operatorname{Ker}\varphi = \{A \in H\,; \varphi(A) = (0,0)\} = \{A \in H\,; a = 0 = c\}$,
$\operatorname{Im}\varphi = \{(9x, 4z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = 9\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$.

5. Costruire tutti gli omomorfismi non banali da $\mathbb{Z}_{20}$ a $\mathbb{Z}_{25}$; per ciascuno di essi determinare il nucleo e l'immagine ed applicare il Teorema Fondamentale di omomorfismo.

Soluzione: Se $\varphi : \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{25}$ è un omomorfismo non nullo, l'ordine dell'immagine $\operatorname{Im}\varphi$ deve essere un divisore proprio sia di 20 che di 25. Quindi $\operatorname{Im}\varphi$ deve avere ordine 5 e quindi $\operatorname{Im}\varphi = \langle \overline{5}_{25} \rangle$ deve essere l'unico sottogruppo di ordine 5 di $\mathbb{Z}_{25}$. Poiché $\operatorname{Im}\varphi = \langle \overline{5}_{25} \rangle = \{\overline{0}_{25}, \overline{5}_{25}, \overline{10}_{25}, \overline{15}_{25}, \overline{20}_{25}\}$ ha 4 generatori (tutti gli elementi non nulli), ci sono 4 omomorfismi non banali. Precisamente

$$\varphi_k : \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{25}\,; \quad \overline{x}_{20} \mapsto k\overline{x}_{25}$$

$k = 5, 10, 15, 20$.

Poiché, per ogni $k = 5, 10, 15, 20$, $\operatorname{Ker}\varphi_k$ ha ordine 4, allora $\operatorname{Ker}\varphi_k = \langle \overline{5}_{20} \rangle = \{\overline{0}_{20}, \overline{5}_{20}, \overline{10}_{20}, \overline{15}_{20}\}$ è l'unico sottogruppo di ordine 4 di $\mathbb{Z}_{20}$. Infine il teorema fondamentale di omomorfismo asserisce che l'applicazione

$$\overline{\varphi_k} : \frac{\mathbb{Z}_{20}}{\langle \overline{5}_{20} \rangle} \longrightarrow \mathbb{Z}_{25}\,; \quad \overline{x}_{20} + \langle \overline{5}_{20} \rangle \mapsto k\overline{x}_{25}$$

è un isomorfismo di gruppi.