Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 1 (4 Ottobre 2007), Tutore **Valeria Pucci**

1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Stabilire se $\mathcal{P}(X)$ è un gruppo rispetto alle operazioni di unione, intersezione, differenza simmetrica.

2. Sia V l'insieme dei vettori (frecce) dello spazio ordinario e sia $w \in V$ un vettore fissato. Indichiamo con τ_w la *traslazione di vettore* w, definita da
$$\tau_w : V \longrightarrow V\,; \quad v \mapsto v + w.$$
Mostrare che l'insieme $T := \{\tau_w\,; w \in V\}$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni (sottogruppo del gruppo totale delle trasformazioni di V).

3. Siano S un insieme e $(G, *)$ un gruppo. Dimostrare che l'insieme
$$\mathcal{F}(S, G) := \{f : S \longrightarrow G\}$$
di tutte le applicazioni di dominio S e codominio G è un gruppo rispetto alla *moltiplicazione puntuale*, definita da
$$(fg)(s) = f(s) * g(s)\,; \quad \text{per ogni } f, g \in \mathcal{F}(S, G)\,,\ s \in S.$$
Dedurne che l'insieme $G^{\mathbb{N}}$ di tutte le successioni $(g_i)_{i \geq 0}$ di elementi di G è un gruppo rispetto all'operazione $(a_i)(b_i) = (a_i * b_i)$.

4. Mostrare che, se G è un gruppo finito, allora ogni $f \in \mathcal{F}(S, G)$ ha ordine finito (rispetto alla moltiplicazione puntuale).

5. Sia G un gruppo. Mostrare che, se ogni elemento $g \in G$, $g \neq e$, ha ordine 2, allora G è commutativo.

6. Siano
$$U := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}\,; \quad V := \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1 \text{ per un opportuno } n \geq 1\}.$$
Mostrare che U è un gruppo moltiplicativo (sottogruppo di $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) e che V è un sottogruppo di U.

7. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia S un sottoinsieme di G. Mostrare che il sottogruppo di G generato da S è
$$H := \{s_1^{z_1} \dots s_n^{z_n}\,; s_i \in S, z_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \dots, n\}.$$

8. Mostrare che S_n è generato da uno qualsiasi dei seguenti sottoinsiemi:
(1) tutti i cicli; (2) tutte le trasposizioni; (3) tutte le trasposizioni del tipo $(1k)$, $1 \leq k \leq n$.

9. Determinare il sottogruppo di S_4 generato da (24) e (1234).

10. Si considerino i sottogruppi $V_4 := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ e $H := \langle(123)\rangle$ di S_4. Mostrare che $V_4 H = H V_4$ e determinare $\langle H \cup V_4 \rangle$.

11. Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ e tutti i sottogruppi del gruppo delle radici trentesime dell'unità $(C_{30}, \cdot)$.