Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 10 (12 Dicembre), Tutore **Valeria Pucci**

1. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi P, Q è un ideale primo se e soltanto se $P \subseteq Q$ oppure $Q \subseteq P$.

2. Sia A un dominio e sia I un ideale di A. Mostrare che

   (a) L'insieme $I[X]$ dei polinomi a coefficienti in I è un ideale di $A[X]$.

   (b) Se P è un ideale primo di A, l'ideale $P[X]$ è primo in $A[X]$. In particolare, un elemento primo di A è primo anche in $A[X]$.

   (Suggerimento: Considerare l'omomorfismo $A[X] \longrightarrow \frac{A}{P}[X]$ definito da $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \to (a_0 + P) + (a_1 + P)X + \ldots + (a_n + P)X^n$)

3. Sia K un campo e sia $A = \frac{K[X,Y,Z]}{I}$, dove I è l'ideale principale di $K[X, Y, Z]$ generato dal polinomio $XY - Z^2$.

   Mostrare che gli elementi X, Y e Z sono primi in $K[X, Y, Z]$, mentre le classi di X, Y e Z sono elementi irriducibili ma non primi in A.

4. Sia $d \in \mathbb{Z}$ tale che $\mid d \mid$ non abbia fattori quadratici e sia $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a+b\sqrt{d} \mid a; b \in \mathbb{Z}\}$. Se $\alpha = a + b\sqrt{d}$, definiamo la *norma* di α come $N(\alpha) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - b^2d$.

   Mostrare che:

   (a) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$;

   (b) $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

   (c) $\alpha, \beta \in Z[\sqrt{d}]$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

   (d) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $Z[\sqrt{d}]$;

   (e) 7 è irriducibile in $Z[\sqrt{5}]$ (benché $N(7) = 49$ non sia primo).

5. Determinare i fattori irriducibili di 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

6. Determinare i fattori irriducibili di 8 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

7. Dimostrare che, nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, gli elementi 5 e $2+i\sqrt{6}$ hanno massimo comune divisore uguale ad 1 , ma per 1 non esiste una identità di Bezout.

   Dimostare poi che gli elementi 10 e $4 + 2i\sqrt{6}$ non hanno massimo comune divisore.

   L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ è a fattorizzazione unica?

8. Sia $a \in \mathbb{C}$ e si consideri l'omomorfismo di anelli
   $$v_a : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, f(X) \to f(a) \ .$$
   Determinare esplicitamente il nucleo e l'immagine di v_a quando
   $$a \in \mathbb{Q}\,,\ a = \sqrt{7}\,,\ a = \sqrt[3]{5}\,,\ a = 3 + 2i\,,\ a = e\,,\ a = \sqrt{\pi + 1}.$$
   In quali casi $\mathrm{Im}(v_a)$ è un campo?