Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 11 - Esercizi a casa

1. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$: 6, 10, 13, 21, $3+4i$, $-3+8i$, $11+3i$.

2. Se $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ è uno degli elementi considerati nell'esercizio precedente e $A := \mathbb{Z}[i]/(\alpha)$,

   (1) Stabilire quando A è un campo;

   (2) Determinare la caratteristica di A;

   (3) Determinare tutti gli ideali di A.

3. Mostrare che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(3)$ è un campo e scrivere esplicitamente tutti i suoi elementi. Se poi $a = 5 + i$, determinare l'inverso della classe di a.

4. Sia $a = 2 + 2i \in \mathbb{Z}[i]$. Determinare esplicitamente gli elementi dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(a)$. Stabilire quali tra essi sono invertibili e quali sono zerodivisori.

5. Nell'anello euclideo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, dividere $3 + 10\sqrt{-2}$ per $2 + \sqrt{-2}$.

6. Sia $f(X) = X^3+\bar{3}X+\bar{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$ e sia E l'anello quoziente di $\mathbb{Z}_5[X]$ modulo l'ideale $(f(X))$. Mostrare che E è un campo contenete isomorficamente $\mathbb{Z}_5$ e che $f(X)$ ha una radice ξ in E. Determinare poi l'inverso in E di ξ^2 e $\xi + \bar{1}$.

7. Sia $f(X) := X^3+\bar{2}X^2+\bar{4}X+\bar{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$. Verificare che $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_5[X]$ e costruire un campo E contenente $\mathbb{Z}_5$ nella quale $f(X)$ abbia una radice ξ.

8. Se $\alpha \in \mathbb{C}$, indichiamo con $\mathbb{Q}(\alpha)$ il più piccolo sottocampo di $\mathbb{C}$ contenenete $\mathbb{Q}$ e α. Costruire esplicitamente i campi:
$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}+2i), \quad \mathbb{Q}(e)$$

9. Sia A un dominio in cui esiste sempre il massimo comune divisore di due elementi non nulli. Mostrare che $MCD(ax, ay) = aMCD(x, y)$, per a, x, $y \in A^*$.

10. Sia A un qualsiasi dominio e siano a, $b \in A$. Dimostrare che

    (1) a e b hanno un minimo comune multiplo m se e soltanto se l'ideale $(a) \cap (b)$ è principale, generato da m.

    (2) Se a e b hanno un minimo comune multiplo m, essi hanno anche un massimo comune divisore d, dato da $d := ab/m$.

    (3) $a, b \in A$ hanno un massimo comune divisore d che soddisfa una identità di Bezout se e soltanto se l'ideale (a, b) è principale, generato da d.

11. Mostrare che il massimo comune divisore degli elementi 3, $X \in \mathbb{Z}[X]$ non soddisfa alcuna identità di Bezout.

12. Sia $A := \mathbb{Q}[X^2, X^3] \subseteq \mathbb{Q}[X]$ l'anello dei polinomi in X^2 e X^3. Mostrare che $1 = MCD(X^2, X^3) \in A$, mentre X^2 e X^3 non hanno un minimo comune multiplo in A (*Suggerimento*: X^5 non divide in A tutti i multipli comuni di X^2 e X^3).

13. Sia $A := \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{Q}[X]$ l'anello dei polinomi di $\mathbb{Q}[X]$ con termine noto in $\mathbb{Z}$. Mostrare che

    (1) X è un elemento irriducibile ma non primo di A. Quindi A non è un dominio ad ideali principali.

    (2) L'ideale $P := X\mathbb{Q}[X]$ di A, formato da tutti i polinomi il cui termine noto è uguale a zero, è un ideale primo di A (*Suggerimento*: Considerare l'omomorfismo $A \longrightarrow \mathbb{Z}\,;\ f(X) \mapsto f(0)$).

    (3) Se $p \in \mathbb{Z}$ è un numero primo, l'ideale principale di A generato da p è un ideale massimale contenente $P := X\mathbb{Q}[X]$ (*Suggerimento*: Considerare l'omomorfismo $A \longrightarrow \mathbb{Z}_p\,;\ f(X) \mapsto \overline{f(0)}$).

    Si può dimostrare che ogni ideale finitamente generato di A è principale. Dando questo per buono, dimostrare che

    (4) L'ideale $P := X\mathbb{Q}[X]$ non può essere finitamente generato in A;

    (5) Due elementi non nulli di A hanno sempre un massimo comune divisore che soddisfa una identità di Bezout.

14. Stabilire se l'ideale $I = (X^2, 5X)$ è principale in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$, giustificando le risposte.