Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 2 - Esercizi a casa

1. Sia G un gruppo moltiplicativo e sia

$$Z(G) := \{x \in G\,; xg = gx \text{ per ogni } g \in G\}.$$

   Mostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G. $\mathbb{Z}(G)$ si chiama il *centro* di G.

2. Siano G e G' due gruppi e sia $G \times G'$ il loro prodotto diretto, con l'usuale operazione sulle componenti. Mostrare che $Z(G \times G') = Z(G) \times Z(G')$.

3. Determinare il reticolo dei sottogruppi di $(\mathbb{Z}_n, +)$ per $2 \leq n \leq 20$.

4. Determinare il reticolo dei sottogruppi del gruppo C_n delle radici complesse n-sime dell'unità per $2 \leq n \leq 20$.

5. Siano m, $n \geq 1$ due interi coprimi. Mostrare che il gruppo $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, con l'usuale operazione sulle componenti, è ciclico, generato da $([1]_m, [1]_n)$. Determinare inoltre tutti i suoi generatori.

6. Siano m, $n \geq 1$ due interi. Determinare l'ordine dell'elemento

$$([a]_m, [b]_n) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n.$$

7. Determinare il reticolo dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$.

8. Dimostrare, per induzione su n, che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Z}_2^n$ ha ordine 2.

9. Sia $G := \langle g \rangle$ un gruppo ciclico infinito moltiplicativo. Mostrare che gli unici generatori di G sono g e g^{-1}

10. Costruire esplicitamente i gruppi moltiplicativi $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ delle unità di $\mathbb{Z}_n$ per $2 \leq n \leq 21$.

11. Stabilire per quali valori di $n \leq 21$ $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ è ciclico e nei casi in cui lo è determinare tutti i suoi generatori.

12. Mostrare che il gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ ha un sottogruppo di ordine 4 che non è ciclico.