Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 3

1. Mostrare che i gruppi D_4 e H non sono isomorfi.

2. Sia K un campo. Determinare il centro di $GL_2(K)$.

3. Sia $\mathbf{A}_4$ il gruppo alterno di grado 4 e sia

$$\mathbf{V}_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

   Mostrare che $\mathbf{V}_4$ è normale in $\mathbf{A}_4$ calcolando esplicitamente le sue classi laterali destre e sinistre. Determinare inoltre il gruppo quoziente $\mathbf{A}_4/\mathbf{V}_4$.

4. Sia $H := \{(1), (12)(34)\} \subseteq \mathbf{V}_4 \subseteq \mathbf{A}_4$. Mostrare che H è normale in $\mathbf{V}_4$ ma non in $\mathbf{A}_4$. Dedurne che la normalità non è una proprietà transitiva.

5. Mostrare che il gruppo ortogonale speciale di grado n su $\mathbb{R}$, $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,;\det(A) = 1\}$, è un sottogruppo normale di indice 2 del gruppo ortogonale $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,; A^{-1} = A^t\}$.

6. Determinare esplicitamente tutti i gruppi quoziente di $(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

7. Determinare esplicitamente tutti i gruppi quoziente del gruppo moltiplicativo delle unità di $\mathbb{Z}_{25}$.

8. Determinare esplicitamente tutti i sottogruppi ed i gruppi quoziente del gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$.

9. Verificare che la relazione di coniugio in un gruppo è una relazione di equivalenza.

   Determinare esplicitamente le classi di coniugio di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, D_4.

10. Sia G un gruppo. Mostrare che

    (1) Se ρ è una relazione di equivalenza compatibile su G, allora $N := [e]_\rho$ è un sottogruppo normale di G e

$$a \;\rho\; b \quad \Longrightarrow \quad a^{-1}b \in N.$$

    (2) La corrispondenza che associa ad ogni relazione di equivalenza compatibile ρ su G il sottogruppo $N := [e]_\rho$ è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle relazioni di equivalenza compatibili su G e i sottogruppi normali di G.