Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 4 - Esercizi a casa

1. Mostrare che l'applicazione di coniugio complesso $z := a+bi \mapsto \bar{z} := a-bi$ è un automorfismo dei gruppi $(\mathbb{C}, +)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

   Verificare inoltre che, se ξ è una radice n-sima dell'unità, allora $\overline{\xi^k} = \xi^{n-k}$, per ogni $0 \leq k \leq n-1$.

2. *Teorema Cinese dei Resti*: Siano $m, n \geq 2$ tali che $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$. Mostrare che l'applicazione

   $$\mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \quad [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n)$$

   è un isomorfismo di gruppi.

3. Costruire la tabella moltiplicativa dei gruppi D_4 e $\mathbb{H}$.

4. Come nella dimostrazione del Teorema di Caylay, costruire un omomorfismo iniettivo del gruppo di Klein in S_4.

5. Come nella dimostrazione del Teorema di Caylay, costruire un omomorfismo iniettivo di $\mathbb{Z}_n$ in S_n.

6. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *caratteristico* se $\alpha(H) = H$, per ogni $\alpha \in Aut(G)$.

   Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

7. Sia G un gruppo e sia $x \in G$. Mostrare che

   (1) L'insieme $C(x) := \{g \in G\,;\;\; gx = xg\}$ è un sottogruppo di G. Questo sottogruppo si chiama il *centralizzante* di x.

   (2) $C(x)$ può non essere normale in G.

   (3) $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$.

   (3) $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ se e soltanto se $gC(x) = hC(x)$. Dedurne che il numero dei coniugati distinti di x è $|G|/|C(x)|$.

8. Determinare le classi coniugate di D_4, A_4, S_4.

9. Sia D_6 il gruppo delle isometrie dell'esagono regolare. Mostrare che D_6 è isomorfo al sottogruppo G di $\mathbf{S}_6$ generato da $\delta = (26)(35)$ e $\rho = (123456)$.

   Determinare inoltre le classi coniugate di G.

10. Determinare tutti gli automorfismi interni del gruppo $\mathbb{H}$.

11. Mostrare che il gruppo degli automorfismi del gruppo di Klein è isomorfo a S_3.

12. Determinare tutti gli omomorfismi di dominio $\mathbb{Z}_{20}$ e codominio $\mathbb{Z}_{12}$.