Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 5 - Esercizi a casa

1. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono omomorfismi di gruppi e, nei casi affermativi, applicare il Teorema di Omomorfismo:
   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_5 \to \bar{a}_{15}$; $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_5 \to 3\bar{a}_{15}$;
   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_5 \to 5\bar{a}_{15}$; $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$; $\bar{a}_{15} \to \bar{a}_5$;
   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$; $\bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_5$; $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_{15}$;
   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_{15} \to 5\bar{a}_{15}$; $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_{15} \to 2\bar{a}_{15}$.

2. Dimostrare che non esiste alcun omomorfismo non banale $\mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.

3. Determinare esplicitamente tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$.

4. Determinare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_{24}$.

5. Determinare il gruppo degli automorfismi di C_{12} (gruppo delle radici 12-sime dell'unità).

6. Determinare esplicitamente tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_{21} \to \mathbb{C}_{30}$ (dove C_{30} è il gruppo delle radici 30-sime dell'unità).

7. Sia G un gruppo ciclico di ordine 4 e sia G' un gruppo di Klein. Determinare tutti i possibili omomorfismi $G \longrightarrow G'$ e $G' \longrightarrow G$.

8. Sia $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ definita da $z \to \frac{z}{|z|}$.

   Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il Teorema di Omomorfismo. Inoltre interpretare geometricamente tale teorema nel piano di Gauss.

9. Determinare il gruppo degli automorfismi di S_3. Mostrare che ogni automorfismo è interno.

10. Determinare un automorfismo non interno del gruppo $\mathbb{H}$ delle unità dei quaternioni.