Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 6 - Esercizi a casa

1. Sia $G := G_1 \times G_2$ il prodotto diretto dei due gruppi G_1 e G_2. Mostrare che
$$Z(G) = Z(G_1) \times Z(G_2).$$
Dedurne che G è un gruppo commutativo se e soltanto se G_1 e G_2 sono entrambi gruppi commutativi.

2. Sia $G := G_1 \times G_2$. Mostrare che, se H_1, H_2 sono sottogruppi di G_1, G_2 rispettivamente, allora $H := H_1 \times H_2$ è un sottogruppo di G. Inoltre H è normale se e soltanto se H_1 e H_2 sono normali e, quando H_1 e H_2 sono normali, l'applicazione
$$G/H \longrightarrow G_1/H_1 \times G_2/H_2\,; \quad (g_1, g_2)H \mapsto (g_1H_1, g_2H_2)$$
è un isomorfismo.

3. Verificare che il sottogruppo $\langle(1,1),(0,2)\rangle$ di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ non è prodotto diretto di due sottogruppi di $\mathbb{Z}$.

4. Mostrare che D_n, $n \geq 3$ è prodotto semidiretto di due suoi sottogruppi.

5. Verificare che D_4 non può essere prodotto diretto di due suoi sottogruppi.

6. Esplicitare un isomorfismo $D_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times S_3$.

7. Esplicitare un isomorfismo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

8. Verificare che $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{28})$ è prodotto diretto interno di due suoi sottogruppi.

9. Mostrare che, per ogni $n \geq 2$, i gruppi $\mathbb{Z}_{n^2}$ e $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ non sono isomorfi.

10. Data un'azione di un gruppo G su un insieme X, per $Y \subseteq X$ l'insieme
$$St(Y) := \{g \in G\,;\ y^g = y,\ \text{per ogni } y \in Y\}$$
si chiama lo *stabilizzatore* di Y in G.
Verificare che $St(Y)$ è un sottogruppo di G.

11. Sia $X := \{1, \ldots, 5\}$ e $Y := \{1, 5\}$. Determinare $St(Y)$ in S_5.

12. Sia X un insieme con n elementi e sia $Y \subseteq X$ un insieme con $k \leq n$ elementi. Mostrare che $St(Y) \subseteq S_n$ è isomorfo a S_{n-k}.

13. Sia $A := \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$. Mostrare che l'applicazione
$$S_n \times A \longrightarrow A\,;\ (\sigma, f(X_1, \ldots, X_n)) \mapsto f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$$
è un'azione di S_n su A.
Per $n = 3$, determinare inoltre le orbite di $X_1X_2+X_1X_3$ e $X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3$.