Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 8 (29 Novembre), Tutore **Valeria Pucci**

1. Sia $A := \{a/b \in \mathbb{Q}\,;\, a,b \in \mathbb{Z},\, 3 \text{ non divide } b\}$. Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

2. Siano $I := \langle S \rangle$ e $J := \langle T \rangle$ ideali di un anello commutativo unitario A. Mostrare che
$$I + J = \langle S \cup T \rangle\,; \quad IJ = \langle \{st\,;\, s \in S\,, t \in T\} \rangle.$$

3. Sia A un anello commutativo unitario. Mostrare che $(a) = (ua)$, per ogni $u \in \mathcal{U}(A)$.

4. Si considerino in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = 126\mathbb{Z}$ e $J = 84\mathbb{Z}$. Determinare gli ideali $I + J$, $I \cap J$, IJ.

5. Sia A un dominio e sia I un ideale di A. Mostrare che l'insieme $I[X]$ dei polinomi a coefficienti in I è un ideale di $A[X]$.

6. Sia p un numero primo. Si determini l'ideale (p, X) di $\mathbb{Z}[X]$ generato da p e X. Si dimostri poi che questo ideale non è principale.

7. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{60}$. Determinare inoltre la struttura degli anelli quoziente $\mathbb{Z}_{60}/\bar{5}\mathbb{Z}_{60}$ e $\mathbb{Z}_{60}/\overline{15}\mathbb{Z}_{60}$. Quanti elementi hanno? Sono integri? Sono campi?

8. Si considerino in $\mathbb{Q}[X]$ gli ideali $I = (f(X))$ e $J = (g(X))$, dove
$$f(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1 \text{ e } g(X) = 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2.$$
Determinare gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

9. Sia $f(X) = X^3 + \bar{2}X^2 + \bar{4}X + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$. Mostrare che l'anello quoziente $A = \mathbb{Z}_5[X]/(f(X))$ è un campo con un numero finito di elementi e determinare esplicitamente tali elementi (in forma generica).

10. Sia $R := A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :
(a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2 - 1)$; (b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3 + X + 1)$;
(c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2 + 2)$; (d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3 + X + \bar{1})$.

11. Sia $A := \mathbb{Q}[X]/I$, dove $I := (X^2 - 5X + 6)$. Stabilire se i seguenti elementi di A sono invertibili e, in caso affermativo, determinarne l'inverso:
$$(X - 1) + I\,; \,(2X - 1) + I\,; \,(X - 3) + I\,.$$

12. Siano $f(X) = X^3 + aX^2 + \bar{5}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$ e $I = (f(X))$.
Determinare se l'anello quoziente $Z_7[X]/I$ è un campo per i valori $a = \bar{4}$ e $a = \bar{5}$. In caso affermativo determinare l'inverso della classe del polinomio $g(X) = X^2 + \bar{2}$.