Un. Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Tutorato 9 (6 Dicembre), Tutore **Valeria Pucci**

1. Effettuare la divisione euclidea di $13+18i$ per $5+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

2. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $5+3i$ e $13+18i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

3. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1+3i)$ e $J = (3-3i)$. Determinare gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

4. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ è un campo.

5. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:
$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}\,.$$

6. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:
$$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$

7. Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne Nucleo ed Immagine:
$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}\,; f(X) \to f(0);$
$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\,; f(X) \to \overline{f(0)};$
$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\,; \sum a_i X^i \to \sum \overline{a_i} X^i;$
$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}\,; f(X) \to f(i);$
$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}\,; f(X) \to f(\sqrt[3]{2}).$

8. Si consideri l'applicazione
$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \text{ definita da } a \to ([a]_3, [a]_7)$$
Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli, determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ed applicare il Teorema di omomorfismo per gli anelli.

9. Sia $R := A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :
(a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2-1)$; (b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3+X+1)$;
(c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2+2)$; (d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3+X+\bar{1})$.
Determinare inoltre gli ideali massimali di R .

10. Studiare l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+aX+\bar{1})}$, determinando per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}_5$ esso è un campo.
Determinare inoltre tutti gli ideali di A nei casi in cui $a = \bar{0}$ e $a = \bar{1}$.