Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013/2014
AL210 - Algebra 2
Prima prova di valutazione intermedia
28 Ottobre 2013

*Cognome*____________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia $\varphi : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ l'applicazione definita da $a + bi \mapsto a - b$.

   (a) Mostrare che φ è un omomorfismo di gruppi.

   (b) Determinare $Ker(\varphi)$ e $Im(\varphi)$ e definire l'isomorfismo canonico
   $$G/Ker(\varphi) \longrightarrow Im(\varphi).$$

   (c) Determinare $\varphi^{-1}(2)$.

2. Sia C_{15} il gruppo delle radici complesse quindicesime dell'unità.

   (a) Determinare il gruppo $Aut(C_{15})$ degli automorfismi di C_{15};

   (b) Stabilire se $Aut(C_{15})$ è un gruppo ciclico.

3. Determinare i generatori, i sottogruppi ed i relativi gruppi quozienti del gruppo $\mathbb{Z}_{18}$.

4. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ si definisca l'operazione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Mostrare che rispetto a questa operazione $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ è un gruppo ciclico e determinare tutti i suoi generatori.

5. Determinare tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_{30} \longrightarrow \mathbb{Z}_{21}$. Per ognuno di essi, determinare nucleo ed immagine