Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013/2014
AL210 - Algebra 2
Seconda prova di valutazione intermedia
9 Gennaio 2014

*Cognome*____________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia G un gruppo con centro $Z := Z(G)$. Mostrare che, per ogni automorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$, si ha $\varphi(Z) = Z$.

2. Si consideri l'ideale $I_n := \langle n, X \rangle \subseteq \mathbb{Z}[X]$.

   (a) Mostrare che l'applicazione

   $$\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \mapsto \overline{a_0}$$

   è un omomorfismo suriettivo di anelli il cui nucleo è I_n;

   (b) Determinare per quali valori di n l'ideale I_n è primo o/e massimale in $\mathbb{Z}[X]$.

3. Siano $\alpha = 11 + 3i$, $\beta = 1 + 8i$, $\gamma = 5 - 8i \in \mathbb{Z}[i]$.

   (a) Determinare un massimo comune divisore tra α e β;

   (b) Determinare gli zero divisori dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/\langle\beta\rangle$;

   (c) Determinare se la classe di $\gamma + \langle\beta\rangle$ è invertibile in $\mathbb{Z}[i]/\langle\beta\rangle$.

4. Stabilire se l'ideale $I = \langle X^2, 5X \rangle$ è principale negli anelli $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ rispettivamente, giustificando le risposte.

5. Determinare i fattori irriducibili di 14 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$. Stabilire inoltre se $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ è o no a fattorizzazione unica.