Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013/2014
AL210 - Algebra 2
Appello A
21 Gennaio 2014

*Cognome*___________________ *Nome*_____________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

Il recupero del 1^o Esonero consiste negli esercizi 1, 2, 6, 7

1. Sia $GL_2(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili di ordine 2 a coefficenti $\mathbb{R}$ e sia
$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \neq (0,0) \right\}.$$
   (a) Si provi che G è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$;
   (b) Se $\mathbb{C}^*$ è il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi, si provi che l'applicazione $\phi : \mathbb{C}^* \to G$, defінta da $\phi(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ è un isomorfismo di gruppi;
   (c) Si determinino tutte le matrici $A \in G$ tali che $A^3 = 1$;
   (d) Si determini una matrice $M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale che $\phi(\overline{z}) = M\phi(z)M^{-1}$, per ogni $z \in \mathbb{C}^*$(dove $\overline{z}$ è il coniugato complesso di z).

2. Sia D_4 il gruppo diedrale di ordine 4 (gruppo delle isometrie del quadrato). Determinare tutti gli omomorfismi di gruppi $D_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$.

3. Si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/\langle 3 \rangle$.

   (a) Mostrare che A è un campo con un numero finito di elementi;

   (b) Se $a := 5 + i \in \mathbb{Z}[i]$, determinare l'inverso in A della classe di a.

4. Sia K un campo e sia I l'ideale dell'anello di polinomi $K[X, Y]$ generato dalle indeterminate X e Y , $I := \langle X, Y \rangle$.

   (a) Stabilire se I è un ideale principale;

   (b) Mostrare che I è un ideale massimale.

5. Sia dato il polinomio $P(X) := X^5 + X^4 + X^3 - 2X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

   (a) Scomporre $P(X)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{Z}_5$.

   (b) Determinare gli zero divisori dell'anello quoziente $B := \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{\langle P(X) \rangle}$.

   (c) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{Z}_5$ la classe $(X^2 + 2X - a) + \langle P(X) \rangle$ è invertibile in B.

6. (*Solo per il recupero del* 1^o *Esonero*)

   Sia $G := \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{11})$ il gruppo moltiplicativo delle unità dell'anello $\mathbb{Z}_{11}$.

   (a) Verificare che G è un gruppo ciclico e determinare tutti i suoi generatori.

   (b) Determinare tutti i sottogruppi di G e, per ogni sottogruppo N di G esplicitare gli elementi del gruppo quoziente $\dfrac{G}{N}$.

7. (*Solo per il recupero del* 1^o *Esonero*)

   Mostrare che il gruppo S_3 delle permutazioni su tre elementi è prodotto semidiretto dei suoi sottogruppi ciclici $H_1 := \langle(123)\rangle$ e $H_2 := \langle(12)\rangle$.

   Stabilire inoltre se S_3 può essere prodotto diretto di due suoi sottogruppi.