Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013/2014
AL210 - Algebra 2
Appello B
13 Febbraio 2014

*Cognome*____________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia G un gruppo moltiplicativo e si consideri l'applicazione

$$\varphi : G \longrightarrow G\,; \quad g \mapsto g^2.$$

   (a) Mostrare che φ è un omomorfismo se e soltanto se G è commutativo.

   (b) Mostrare che, se G è un gruppo commutativo finito di ordine dispari, φ è biiettivo.

2. Determinare tutti gli omomorfismi di gruppi da $(S_3, \circ)$ in $(\mathbb{Z}_6, +)$.

3. Sia A un anello unitario e sia I l'ideale di A generato dal sottoinsieme $C = \{xy - yx;\ x, y \in A\}$.

   (a) Verificare che l'anello quoziente A/I è commutativo.

   (b) Mostare che, se J è un ideale di A e A/J è commutativo, risulta $I \subseteq J$.

4. Sia $\omega \neq 1$ una radice complessa terza dell'unità e sia A il seguente sottoinsieme del campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi:

$$A := \{a + b\omega\, ; a, b \in \mathbb{Z}\}\,.$$

   (a) Dimostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

   (b) Data l'applicazione

$$N : A \to \mathbb{Z}\,; \quad (a + b\omega) \mapsto a^2 + b^2 - ab,$$

   dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni x, $y \in A$.

   (c) Usare N per determinare gli elementi invertibili di A.

   (d) Stabilire se l'elemento $1 + 2\omega$ è irriducibile in A.

5. Si considerino nell'anello di polinomi $\mathbb{Q}[X]$ gli ideali $I := \langle f(X) \rangle$ e $J := \langle g(X) \rangle$, dove

$$f(X) := 2X^3 + X^2 + X - 1 \text{ e } g(X) := 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2.$$

(a) Determinare un generatore per gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

(b) Stabilire se gli anelli quozienti $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I+J}$ e $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I \cap J}$ sono integri o/e campi.