**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013/2014**
**AL210 - Algebra 2**
**Appello C**
11 Giugno 2014

*Cognome*____________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*____________________

**Avvertenza:** Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia $SL_2(\mathbb{Z})$ il gruppo delle matrici di ordine 2 a coefficenti $\mathbb{Z}$ aventi determinante uguale a 1. Sia $N$ il sottogruppo di $SL_2(\mathbb{Z})$ dato da

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid 3 \text{ divide sia } b \text{ che } c \right\}.$$

   (a) Dimostrare che, per ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ che appartiene ad $N$, 3 divide $d - a$;

   (b) Usare il primo punto per dimostrare che $N$ è un sottogruppo normale di $SL_2(\mathbb{Z})$;

   (c) Sia $g := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determinare l'ordine di $g$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ e l'ordine della classe $gN$ nel gruppo quoziente $SL_2(\mathbb{Z})/N$.

2. Sia $\mathbb{C}^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli e si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* ; \quad z \mapsto z^3.$$

   (a) Verificare che $\varphi$ è un omomorfismo di gruppi.

   (b) Determinare il nucleo e l'immagine di $\varphi$.

   (c) Mostrare che $\mathbb{C}^*$ è isomorfo al suo gruppo quoziente $\mathbb{C}^*/Ker(\varphi)$.

3. Si considerino nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I := \langle 1 + 3i \rangle$ e $J := \langle 3 - 3i \rangle$.

   (a) Determinare un generatore per gli ideali $I + J$ e $I \cap J$ .

   (b) Stabilire se gli anelli quozienti $\frac{\mathbb{Z}[i]}{I+J}$ e $\frac{\mathbb{Z}[i]}{I \cap J}$ sono integri o/e campi.

4. Si determini il gruppo degli automorfismi del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_8$. Si stabilisca inoltre se questo gruppo è ciclico.

5. Sia $A := \mathbb{Z}_2[X]$ e sia $I := \langle X^3 + X + 1 \rangle$.

   (a) Determinare esplicitamente tutti gli elementi di $A/I$.

   (b) Stabilire se $A/I$ è un campo