

# AL210 Algebra 2 - Gruppi, Anelli, Campi

A.A. 2013/2014

Prof. Stefania Gabelli

## 1. Gruppi

Operazioni binarie e loro proprietà. Elementi neutri e simmetrizzabili. Unicità dell'elemento neutro e del simmetrico di un elemento. Notazione additiva e moltiplicativa.

Gruppi. Il gruppo additivo  $(Z_n, +)$  delle classi resto modulo  $n$ . Il gruppo moltiplicativo  $(U(Z_n), \cdot)$ . Il gruppo delle corrispondenze biunivoche di un insieme in se stesso. Richiami sulle proprietà del gruppo  $S_n$ : decomposizione di una permutazione in cicli disgiunti, parità, ordine.

Ordine di un gruppo. Gruppi finiti. Tabelle di moltiplicazione. Gruppi di Klein. Gruppi diedrali. Il gruppo delle unità dei quaternioni.

Sottogruppi. Potenze di un elemento. Sottogruppi generati da un sottoinsieme. Sottogruppi generati da un elemento. Ordine di un elemento. I sottogruppi di  $Z$ . Gruppi ciclici. Generatori di un gruppo ciclico. Sottogruppi di un gruppo ciclico.

Classi laterali di un sottogruppo. Teorema di Lagrange. Sottogruppi normali. Gruppo quoziente.

Omomorfismi tra gruppi. Immagine e nucleo di un omomorfismo. Relazione di equivalenza associata al nucleo. Controimmagine di un elemento. Teoremi di isomorfismo. Ogni gruppo ciclico è isomorfo a  $Z$  oppure a  $Z_n$ , per un opportuno  $n$ . Corrispondenza tra sottogruppi tramite un omomorfismo.

Automorfismi di un gruppo. Omomorfismi e automorfismi di gruppi ciclici. Teorema di Cayley. Centro di un gruppo.

Prodotti diretti e semidiretti di gruppi.

Classi di coniugio. Classi di coniugio in  $S_n$ . L'equazione delle classi. Cenni sui  $p$ -gruppi finiti.

Enunciato del teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti. Classificazione dei gruppi di ordine basso.

## 2. Anelli

Anelli. Anelli commutativi, unitari, interi. Domini. Campi. Anelli e campi di numeri. L'anello  $Z_n$  e il campo  $Z_p$ ,  $p$  primo. Elementi invertibili e zero divisori.

Sottoanelli. Ideali. Ideali generati da un sottoinsieme e ideali principali. Classi laterali di un ideale. Anelli quoziente.

Omomorfismi tra anelli. Immagine e nucleo di un omomorfismo. Relazione di equivalenza associata al nucleo. Controimmagine di un elemento.

Teoremi di isomorfismo. Corrispondenza tra sottoanelli e ideali tramite un omomorfismo. Ideali primi e massimali.

Campo dei quozienti di un dominio.

Divisibilità in un dominio. Elementi primi ed irriducibili. MCD e mcm. Domini euclidei e a ideali principali. Ideali e quozienti di domini euclidei. Domini atomici e a fattorizzazione unica. Esempi negli anelli di interi quadratici e negli anelli di polinomi. L'anello  $Z[i]$  degli interi di Gauss.

Il Lemma di Gauss. Anelli di polinomi su domini a fattorizzazione unica.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] G.M. PIACENTINI CATTANEO, *Algebra, un approccio algoritmico*. Decibel - Zanichelli, (1996).
- [2] S. GABELLI - F.GIROLAMI, *Anelli di Polinomi*. Dispense, (2004).
- [3] M. FONTANA - S. GABELLI, *Esercizi di Algebra*. Aracne, (1993).
- [4] M. ARTIN, *Algebra*. Bollati - Boringhieri, (1997).
- [5] I.N. HERSTEIN, *Algebra*. Editori Riuniti, (2004).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto <input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale <input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO

L'esame finale consiste di una prova scritta e di un colloquio orale, volto ad accertare l'acquisizione da parte dello studente dei concetti e dei metodi illustrati nel corso.

Sono previste due prove scritte di valutazione intermedia (esoneri): gli studenti che abbiano conseguito in ogni prova una votazione  $\geq 15$  e una votazione media  $\geq 18$  sono esonerati dal sostenere la prova di esame scritta, purché accedano alla prova orale negli appelli della prima sessione utile (appelli A e B). Se la seconda prova risulta sufficiente è possibile *recuperare il primo esonero* nell'appello A. Il secondo esonero non si recupera.

Chi ha sostenuto positivamente le prove di esonero, può comunque scegliere di svolgere una delle prove scritte negli appelli. Ma in questo caso la valutazione finale terrà conto del voto di esame e si perderà il voto di esonero.

La prenotazione agli esami è obbligatoria.