Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 1 (26 Settembre 2013)

N.B.: Gli esercizi denotati con * sono stati svolti in classe.

Esercizio 1. * Sia X un insieme, $\mathcal{P}(X)$ con l'operazione data dall'unione insiemistica.

(a) Stabilire qual è l'elemento neutro dell'unione su $\mathcal{P}(X)$ e determinare, se esistono, gli elementi simmetrizzabili.

(b) Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto e $P_A := \{B : A \subseteq B \subseteq X\}$. Dimostrare che l'unione è una operazione binaria su P_A. Stabilire se esiste l'elemento neutro.

Esercizio 2. * Sia X un insieme totalmente ordinato.

(a) Dimostrare che l'applicazione che associa $\max(a, b)$ (risp. $\min(a, b)$) alla coppia di elementi $(a, b) \in X \times X$ è una operazione binaria su X. Stabilire poi se l'operazione è associativa e se è commutativa.

(b) Determinare condizioni necessarie e sufficienti sull'insieme X affinché esista l'elemento neutro per l'operazione max (risp. min). Assumendo soddisfatte tali condizioni, determinare, se esistono, gli elementi simmetrizzabili.

(c) Stabilire se valgono le proprietà distributive di min rispetto a max e viceversa su X.

(d) Sia $X := \{5, 7, 24, 87\}$. Scrivere la tabella moltiplicativa di X con l'operazione max e con l'operazione min.

Esercizio 3. * Si considerino le operazioni binarie su $\mathbb{Z}$ denotate rispettivamente $\cdot, \diamond, \triangle$ e definite, per ogni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, nel modo seguente:

$$x \cdot y := x + y + 1; \quad x \diamond y := \mid x \mid + y; \quad x \triangle y := xy + 1.$$

Per ognuna di queste operazioni stabilire se sono verificate le proprietà: associativa, commutativa, esistenza di elemento neutro. Descrivere gli eventuali elementi simmetrizzabili rispetto a ciascuna delle operazioni.

Esercizio 4. Sia X un insieme e $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti.

(a) Dimostrare che la *differenza simmetrica* Δ è una operazione binaria su $\mathcal{P}(X)$.

(b) Dimostrare che esiste l'elemento neutro per Δ.

(c) Dimostrare che ogni elemento di $\mathcal{P}(X)$ è simmetrizzabile rispetto a Δ.

Esercizio 5. Sia dato l'insieme $X := \mathbb{Z}\times\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Date le seguenti operazioni binarie su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

$$(a, b) + (\alpha, \beta) := (a + \alpha, b + \beta); \qquad (a, b) \bullet (\alpha, \beta) := (a\alpha, \alpha b + a\beta),$$

dimostrare che:

(a) le rispettive restrizioni a X sono operazioni binarie su X;

(b) $+$ e $\bullet$ sono associative e commutative su X;

(c) esiste l'elemento neutro per entrambe le operazioni;

(d) vale la proprietà distributiva di $\bullet$ rispetto a $+$;

(e) ogni elemento è simmetrizzabile rispetto a $+$ ed esistono elementi di X che non sono simmetrizzabili rispetto a $\bullet$.

Esercizio 6. Sia $G := GL_3(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Si dimostri che i seguenti sono sottogruppi di G (nell'ordine gruppo speciale lineare, matrici diagonali, matrici triangolari superiori, matrici ortogonali, matrici ortogonali speciali):

$$SL_3(\mathbb{R}), \quad D_3(\mathbb{R}), \quad T_3^+(\mathbb{R}), \quad O_3(\mathbb{R}), \quad SO_3(\mathbb{R})$$