AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 1 - 30/09/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

Esercizio 1
Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbf{S}_4$

$$\mathbf{V} := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Mostrare che $\mathbf{V}$ è un gruppo commutativo rispetto alla composizione di permutazioni. Tale gruppo si chiama il *gruppo di Klein* ($\mathbf{V}$ sta per il tedesco *vier* che significa *quattro*).

Esercizio 2
Si consideri in $\mathbb{Z}$ l'operazione definita da

$$a \star b := a^2 + b.$$

- Stabilire se l'operazione $\star$ è associativa o/e commutativa;
- Stabilire se esiste in $\mathbb{Z}$ un elemento neutro a destra o/e a sinistra rispetto all'operazione $\star$.

Esercizio 3
Stabilire se l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto al prodotto cosi definito: $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$.

Esercizio 4
Mostrare che l'insieme $M(n, \mathbb{Z})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$ è un anello rispetto alla somma e alla moltiplicazione righe per colonne. Determinare inoltre gli elementi invertibili di $M(n, \mathbb{Z})$.

Esercizio 5

- Sia G un (semi)gruppo moltiplicativo e sia

$$Z(G) := \{x \in G\,; xg = gx \text{ per ogni } g \in G\}.$$

  Mostrare che $Z(G)$ è un sotto(semi)gruppo di G. $\mathbb{Z}(G)$ si chiama il *centro* di G.

- Determinare il centro del semigruppo moltiplicativo dell'anello delle matrici $M(2, \mathbb{R})$.

Esercizio 6
Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, indichiamo con $n\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi relativi multipli di n . Dimostrare che:

1. Se $n > 1$, $n\mathbb{Z}$ è un anello commutativo non unitario;
2. $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \mid n$;
3. $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, dove $a = m.c.m.(m, n)$.
4. Se $m \nmid n$ e $n \nmid m$, allora $n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} \neq a\mathbb{Z}$ per ogni $a \in \mathbb{N}$.

Esercizio 7
Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto modulo n è un campo se e soltanto se $n = p$ è un numero primo.

Esercizio 8
Siano

$$U := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}\,; \quad V := \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1 \text{ per un opportuno } n \geq 1\}.$$

Mostrare che U è un gruppo moltiplicativo (sottogruppo di $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) e che V è un sottogruppo di U.

Esercizio 9
Scrivere le seguenti permutazioni di $\mathbf{S}_9$ come prodotto di cicli disgiunti. Determinarne inoltre l'ordine e la parità:

$$(143)(2531)(24)\,; \quad (176)(914)\,; \quad (23)(21)(24)\,;$$
$$(13579)(2468)\,; \quad (1653)(4368)(879)\,; \quad (13)(1435)(7986)(123)\,.$$

Esercizio 10
Stabilire se $(\mathbb{Z}_8, *)$ è un gruppo dove $*$ è l'operazione definita:
$a * b := ab - 1 \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_8$.

Esercizio 11
Sia $\sigma \in S_n$ la permutazione $(123\ldots n)$.
Stabilire per quali $n \geq 1$, σ^2 è un ciclo unico e per quali è uguale ad un prodotto di più cicli disgiunti.

Esercizio 12
Determinare esplicitamente il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$ per $2 \leq n \leq 15$.