AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 10 - 16/12/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

1. Sia $v_3 : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da:
$$v_3(x) = n \text{ se } 3^n \text{ divide } x \text{ e } 3^{n+1} \text{ non divide } x.$$
Posto
$$A = \{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}\,; v_3(x) - v_3(y) \geq 0\} \cup \{0\},$$
   (a) Mostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;
   (b) Determinare il gruppo degli elementi invertibili di A;
   (c) Mostrare che $3A$ è l'unico ideale massimale di A.

2. Effettuare la divisione euclidea di $10 + 7i$ per $5 - 2i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

3. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $10 + 7i$ e $5 - 2i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

4. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1 + 3i)$ e $J = (3 - 3i)$. Determinare gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

5. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ è un campo.

6. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:
$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}\,.$$

7. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:
$$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$

8. Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne Nucleo ed Immagine:
$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}\,; f(X) \to f(0);$
$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\,; f(X) \to \overline{f(0)};$
$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\,; \sum a_i X^i \to \sum \overline{a_i} X^i;$
$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}\,; f(X) \to f(i);$
$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}\,; f(X) \to f(\sqrt[3]{2}).$

9. Si consideri l'applicazione
$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \text{ definita da } a \to ([a]_3, [a]_7)$$
Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli, determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ed applicare il Teorema di omomorfismo per gli anelli.

10. Sia $R := A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :

 (a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2 - 1)$; (b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3 + X + 1)$;

 (c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2 + 2)$; (d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3 + X + \bar{1})$.

 Determinare inoltre gli ideali massimali di R .

11. Studiare l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2 + aX + \bar{1})}$, determinando per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}_5$ esso è un campo.

 Determinare inoltre tutti gli ideali di A nei casi in cui $a = \bar{0}$ e $a = \bar{1}$.

12. Sia $a \in \mathbb{C}$ e si consideri l'omomorfismo di anelli

$$v_a : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, f(X) \to f(a) .$$

 Determinare esplicitamente il nucleo e l'immagine di v_a quando

$$a = 3\sqrt{4}\,,\ a = 3 + 2i\,,\ a = e\,,\ a = \sqrt{\pi + 1}.$$

 In quali casi $\mathrm{Im}(v_a)$ è un campo?

13. Sia $A := \mathbb{Q}[X]/I$, dove $I := (X^2 - 5X + 6)$.

 Stabilire se i seguenti elementi di A sono invertibili e, in caso affermativo, determinarne l'inverso:

$$(X - 1) + I\,;\ (2X - 1) + I\,;\ (X - 3) + I\,.$$

14. Siano $f(X) = X^3 + aX^2 + \bar{5}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$ e $I = (f(X))$.

 Determinare se l'anello quoziente $Z_7[X]/I$ è un campo per i valori $a = \bar{4}$ e $a = \bar{5}$. In caso affermativo determinare l'inverso della classe del polinomio $g(X) = X^2 + \bar{2}$.

15. Sia fissata la matrice : $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ e sia $I = \alpha^0$ la matrice identità di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

 Si consideri l'applicazione:

$$\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})\,, \quad \textstyle\sum_{i=0}^n a_i X^i \to \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i.$$

 Verificare che ϕ è un omomorfismo di anelli ed esplicitare $\mathrm{Im}(\phi)$ e $\mathrm{Ker}(\phi)$. Stabilire infine se $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

16. Sia K un campo e sia $A = \frac{K[X,Y,Z]}{I}$, dove I è l'ideale principale di $K[X, Y, Z]$ generato dal polinomio $XY - Z^2$.

 Mostrare che gli elementi X, Y e Z sono primi in $K[X, Y, Z]$, mentre le classi di X, Y e Z sono elementi irriducibili ma non primi in A.

17. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi che non siano l'uno contenuto nell'altro non è un ideale primo.

18. Sia $t \in \mathbb{Z}$ tale che $\mid t \mid$ non abbia fattori quadratici e sia $\mathbb{Z}[\sqrt{t}] = \{a + b\sqrt{t} \mid a; b \in \mathbb{Z}\}$. Se $\alpha = a + b\sqrt{t}$, definiamo la *norma* di α come $N(\alpha) = (a + b\sqrt{t})(a - b\sqrt{t}) = a^2 - b^2 t$. Mostrare che:

 (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$;

(c) $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

(d) $\alpha, \beta \in Z[\sqrt{t}]$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

(e) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $Z[\sqrt{t}]$;

(f) 7 è irriducibile in $Z[\sqrt{5}]$ (benché $N(7) = 49$ non sia primo).

19. Determinare i fattori irriducibili di 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

20. Determinare i fattori irriducibili di 8 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

21. Dimostrare che, nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, gli elementi 5 e $2+i\sqrt{6}$ hanno massimo comune divisore uguale ad 1 , ma per 1 non esiste una identità di Bezout.

    Dimostare poi che gli elementi 10 e $4+2i\sqrt{6}$ non hanno massimo comune divisore.

    L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ è a fattorizzazione unica?

22. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

    $$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } (a+bi)+(p) \to (\bar{a}+\bar{b}X)+(X^2+1)$$

    è un isomorfismo di anelli.

    Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio X^2+1 è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$.

    Quindi, se p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$, $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(p)}$ è un campo con p^2 elementi.

23. Sia A un anello e K il suo campo dei quozienti. A si dice *anello di valutazione* se $\forall a \in K$ allora $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

    (1) Mostrare che l'anello $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ non divide } n\}$ con p primo in $\mathbb{Z}$ è di valutazione.
    (2) Dimostrare che in un dominio di valutazione ogni ideale generato da un numero finito di elementi è principale. (mostrare che dati due ideali (x) e (y) allora $(x) \subseteq (y)$ oppure $(y) \subseteq (x)$).

24. Si considerino gli anelli quoziente:

    $$A := \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^3+X+1)} \text{ e } F := \frac{A[T]}{(T^2+T+1)}$$

    (1) Si dimostri che esistono campi con 8 elementi.
    (2) Si dica se il polinomio T^2+T+1 è irriducibile su $A[T]$.
    (3) Si calcoli la cardinalità di F e si dica che è un campo.