AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 3 - 14/10/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

Esercizio 1
Determinare tutti i sottogruppi, e le loro relative classi laterali destre e sinistre, dei seguenti gruppi verificando il teorema di Lagrange: $(Z_{18}, +)$; $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$.

Esercizio 2
Sia G un gruppo e $H \leq G$; dimostrare che:
- per ogni $g \in G$, l'insieme $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$, è un sottogruppo di G.
-Mostrare che l'applicazione $H \longrightarrow gHg^{-1}$, $h \mapsto ghg^{-1}$ è una biiezione.
-se $H \leq G$ è l'unico sottogruppo di G che ha ordine finito uguale a n, allora H è normale in G.

Esercizio 3
Si considerino i seguenti sottogruppi di A_4 :

$$H := \langle (12)(34) \rangle; \quad V := \langle (12)(34), (14)(23) \rangle.$$

Si dimostri che $H \trianglelefteq V$, $V \trianglelefteq A_4$ ma $H \not\trianglelefteq A_4$.

Esercizio 4
In $\mathbb{Z}_{20}$ è definita la seguente relazione:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ se e solo se 5 divide } a - b \text{ in } \mathbb{Z}.$$

Mostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza ed è compatibile con l'operazione di $(\mathbb{Z}_{20}, +)$;
Descrivere il sottogruppo normale N associato alla relazione.

Esercizio 5
Sia $G = \Big\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\Big\}$.
Dire se G è un gruppo con l'operazione $\cdot$ definita come:
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$
G è abeliano?
Dopo aver verificato che $H = \Big\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Q}, a \neq 0\Big\}$. è un sottogruppo di G descriverne le classi laterali destre e sinistre.

Esercizio 6
Mostrare che il gruppo ortogonale speciale di grado n su $\mathbb{R}$, $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,; \det(A) = 1\}$, è un sottogruppo normale di indice 2 del gruppo ortogonale $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,; A^{-1} = A^t\}$.

Esercizio 7
Siano:
$N = \Big\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\Big\}; \quad H = \Big\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ab \neq 0\Big\}$
Dimostrare che N e H sono sottogruppi di $GL_2(\mathbb{R})$, N è normale in H, H non

è normale in $GL_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 8
Sia $H := \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 1\}$.
Verificare che H è un sottogruppo di S_4 e descriverne le classi laterali destre e sinistre.
H è normale in S_4?

Esercizio 9
Mostrare che ogni sottogruppo del gruppo **H** delle unità dei quaternioni è normale.

Esercizio 10
Sull'insieme $G = \mathbb{Z}_4 \times \{-1, 1\}$ si definisca l'operazione $\cdot$ ponendo per ogni $(x, u), (y, v) \in G$

$$(x, u) \cdot (y, v) = (x + uy, uv)$$

(a) Si dimostri che G con questa operazione è un gruppo non abeliano.
(b) Si trovi un sottogruppo di G che non è normale.