AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 4 - 21/10/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

Esercizio 1
Sull'insieme $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca un'operazione $\cdot$ ponendo per ogni $(x, y, z), (u, v, w) \in G$

$$(x, y, z) \cdot (u, v, w) = (x + (-1)^z u, y + v, z + w)$$

(a) Si dimostri che G con questa operazione e' un gruppo non abeliano.
(b) Si dimostri che il sottoinsieme $N = \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}$ di G e' un sottogruppo normale di G e che $G/N \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(c) Calcolare il centro di G.

Esercizio 2
Determinare tutti gli omomorfismi tra i seguenti gruppi e stabilire quali di essi sono suriettivi:
(a) da $\mathbb{Z}_{28}$ in $\mathbb{Z}_9$;
(b) da $\mathbb{Z}_{27}$ in $\mathbb{Z}_{12}$;
(c) da $\mathbb{Z}_{20}$ in $\mathbb{Z}_{10}$;
(d) da $\mathbb{Z}_{12}$ in $\mathbb{Z}_{30}$;

Esercizio 3
Sia G il sottogruppo additivo dei numeri complessi

$$G = \{x + iy | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Si provi che l'applicazione $f : G \to G$ definita da $f(x + iy) = x + y$ e' un endomorfismo di G;
(b) si dimostri che $\ker(f)$ e' ciclico e se ne trovi un generatore;
(c) si trovi $f(G)$.

Esercizio 4
Sia $\mu \in AUT(\mathbb{Q}, +)$. Si dimostri che:

- esiste $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, per cui sia $\mu(x) = rx \; \forall x \in \mathbb{Q}$;
- $AUT(\mathbb{Q}, +) \cong (\mathbb{Q}^*, \cdot)$;
- $AUT(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +) \cong GL_2(\mathbb{Q})$.

Esercizio 5 Calcolare il numero di elementi di $GL_3(\mathbb{F}_5)$. Trovare un sottogruppo di $GL_3(\mathbb{F}_5)$ di indice 4.
Suggerimento: mostrare che $F : GL_3(\mathbb{F}_5) \to (\mathbb{F}_5^*, \cdot)$ tale che $F(A) := DET(A)$ è un omomorfismo.

Esercizio 6 Siano H e G due gruppi e f e g due omomorfismi da G in H. Sia $A := \{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$. Provare che:

(a) A è un sottogruppo di G
(b) se H è abeliano allora A è normale in G
(c) se $Ker(f)A = G$ allora $f = g$
(d) se $|G| = 36$, $|H| = 3$ e 9 divide $|A|$ allora $f = g$

Esercizio 7
Dimostrare che:
(a) il gruppo quoziente $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{S}, \cdot)$, dove $\mathbb{S}$ e' l'insieme dei numeri complessi z con $|z| = 1$;
(b) l'insieme $(\mathcal{U}_n, \cdot)$ delle radici n-esime dell'unita', n>1, e' un sottogruppo di $\mathbb{S}$;
(c) il gruppo quoziente $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \cong (\mathcal{U}_n, \cdot)$.

Esercizio 8
Dire se l'applicazione $f : M_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ t.c. $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$, e' un omomorfismo di gruppi usando il $+$ come operazione.
Dopo averne determinato il nucleo, descrivere il gruppo quoziente $M_2(\mathbb{Z})/\ker(f)$.

Esercizio 9
Sia A un gruppo non banale e sia $\tau : A \longrightarrow A$ l'applicazione definita da $\tau(a) = a^{-1}$. Si dimostri che :

- τ è biettiva;
- τ è un automorfismo $\Longleftrightarrow$ A è un gruppo abeliano;
- se $\forall a \in A$, si ha che $o(a)$ divide 2 $\Longrightarrow \tau = id_A$;
- se $\tau \in AUT(A) \Longrightarrow o(\tau)$ divide 2 .

Esercizio 10
Sia G un gruppo commutativo, si definisca una relazione $\sim$ ponendo per ogni $x, y \in G$; $x \sim y$ se $(xy^1)^2 = 1$.
(a) Si provi che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Si provi che $[1_G]_\sim$ è un sottogruppo di G.
(c) Assumendo che $[1_G]_\sim = \{1_G\}$, si determini $[x]_\sim$ per ogni $x \in G$.