AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 5 - 11/11/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

Esercizio 1

Sia G un gruppo e sia $x \in G$. Si consideri il seguente insieme:

$$C(x) := \Big\{ g \in G \; gx = xg \Big\},$$

chiamato *centralizzante* di x.

- Si dimostri che $C(x)$ e' un sottogruppo di G.
- Si illustri con un esempio che il centralizzante di un elemento può non essere normale in G.
- Si dimostri che $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ se e soltanto se $gC(x) = hC(x)$

Esercizio 2

Sia $Z(G) := \Big\{ g \in G | gx = xg, \forall x \in G \Big\}$ il *centro* del gruppo G.

Si dimostri che: $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$.

Esercizio 3

Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo di ordine 2. Mostrare che H è normale in G se e soltanto se H è contenuto nel centro di G.

Esercizio 4

Mostrare che in un gruppo due elementi coniugati hanno lo stesso ordine.

Esercizio 5

Mostrare che due elementi x, y di un gruppo G sono coniugati se e soltanto se esistono $a, b \in G$ tali che $x = ab$ e $y = ba$.

Dedurne che, per ogni $h, g \in G$, gli elementi hg e gh hanno lo stesso ordine.

Esercizio 6

Determinare la classe di coniugio della permutazione $\alpha := (23)(541)$ di $\mathbf{S_5}$.

Verificare inoltre che $(123)(45)$ sta in questa classe e trovare almeno due permutazioni diverse σ, $\tau \in \mathbf{S_5}$ tali che $\sigma^{-1}\alpha\sigma = (123)(45) = \tau^{-1}\alpha\tau$.

Esercizio 7

Sia $\alpha := (12)(34)(56)$. Stabilire quali tra le seguenti permutazioni di $\mathbf{S_6}$ sono coniugate ad α: $(123)(456)$, $(13)(2645)$, $(13)(26)(54)$.

Esercizio 8

Dimostrare che la classe di coniugio di (123) in A_4 (attenzione, non in S_4 !) è composta da quattro elementi.

Esercizio 9

Determinare le classi di coniugio di A_4 e S_4. Per ciascuna classe determinare il centralizzante di un rappresentante della classe. Determinare, utilizzando le classi di coniugio, i sottogruppi normali di A_4.

Esercizio 10
Trovare una permutazione $\alpha \in S_{10}$ che coniughi $(1,3,5)(2,10,8,9)(6,7)$ in $(4,2,9)(3,1,5,8)(6,7)$.
Ripetere l'esercizio prendendo $\alpha \in A_{10}$ (se possibile).

Esercizio 11
In un gruppo infinito G, sia F l'insieme degli elementi che hanno un numero finito di coniugati distinti. Provare che F è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 12
Siano $\sigma = (12345)$, $\rho = (12435)$ e $\tau = (34)$ elementi di S_5.

- Si verifichi che
$$\sigma^{\alpha^{-1}} := \alpha\sigma\alpha^{-1} = \rho \Longleftrightarrow \alpha \in \{(34), (1245), (14)(235), (13)(254), (1532)\}.$$
- Sia $H =< \sigma >$. Si descriva la classe laterale τH e si dimostri che :
$$\sigma^{\alpha^{-1}} = \rho \Longleftrightarrow \alpha \in \tau H.$$

Esercizio 13
Sia G un gruppo commutativo, $\mathbb{Z}$ il gruppo additivo degli interi e $W = G \times \mathbb{Z}$ il loro prodotto diretto.
Sia $h \in G$ fissato e si consideri l'applicazione $\phi : W \to G$ definita da $\phi(z, g) = gh^z$
(a) Si provi che ϕ è un omomorfismo suriettivo di gruppi;
(b) sia $K = \ker(f)$. Si provi che K è infinito;
(c) si determini $\phi^{-1}(\langle h \rangle)$.
(d) Posto $G_1 = \{(0, g) \mid g \in G\}$. Si provi che $W = G_1 \times K$.
n.b h^z indica l'elevamento a potenza di h

Esercizio 14
Sia L il sottogruppo di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generato da $(1,1)$ e $(0,2)$. Provare che L non è ciclico e che L non è del tipo $H \times K$ con H, K sottogruppi di $\mathbb{Z}$.

Esercizio 15
Elencare gli elementi del gruppo $\mathbb{Z}_4 \times S_3$ e determinarne un sottogruppo di ordine 8.

Esercizio 16
Sia $G = H \times K$ il prodotto diretto dei gruppi finiti H e K.
Sia $S \leq H$ un sottogruppo di H e sia $S' := S \times \{e\}$. Dimostrare che:
(a) $[G : S'] = |K|[H : S]$.
(b) se S è normale in H allora S' è normale in G.