AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 6 - 18/11/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

1. Scrivere le seguenti permutazioni di $\mathbf{S_9}$ come prodotto di cicli disgiunti. Determinarne inoltre l'ordine e la parità:
$$(143)(2531)(24)\,; \quad (176)(914)\,; \quad (23)(21)(24)\,;$$
$$(13579)(2468)\,; \quad (1653)(4368)(879)\,; \quad (13)(1435)(7986)(123)\,.$$

2. Mostrare che, se H è un sottogruppo di $\mathbf{S_n}$ che contiene una permutazione dispari, allora esattamente la metà delle permutazioni di H sono dispari (in particolare l'ordine di H è pari).

3. Determinare le possibili strutture cicliche e gli ordini degli elementi del gruppo alterno di grado sette $\mathbf{A_7}$.

4. Mostrare che se $\pi \in \mathbf{S_n}$ e $\gamma = (a_1, a_2, , a_r)$ è un r-ciclo, allora
$$\pi \circ \gamma \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_r)).$$
Dedurne che tutti gli r-cicli sono coniugati in $\mathbf{S_n}$.

5. Determinare le classi coniugate di $\mathbf{S_4}$.

6. Siano $\alpha\,, \tau \in I \subseteq \mathbf{S_9}$ con
$I = \{(13564), (45)(842)(793), (34)(867), (36578)(1429), (13)(76)(47)\}$.
Determinare $\tau \circ \alpha \circ \tau^{-1}$.

7. Determinare (*se esiste*) $\tau \in \mathbf{S_9}$ tale che $\beta = \tau \circ \alpha \circ \tau^{-1}$ quando:
   (a) $\alpha = (1357)\,, \quad \beta = (2468)$;
   (b) $\alpha = (12)(5389)\,, \quad \beta = (35)(1476)$;
   (c) $\alpha = (12)(34)(67)\,, \quad \beta = (23)(46)(17)$;
   (d) $\alpha = (4657)(98123)\,, \quad \beta = (5746)(123)(89)$;
   (e) $\alpha = (123456789)\,, \quad \beta = (675983241)$.

8. Mostrare che il numero degli r-cicli distinti di $\mathbf{S}_n$ è $\frac{n!}{(n-r)!r}$.

9. Sia $\sigma \in \mathbf{S}_5$ un 5-ciclo. Mostrare che il centralizzante di σ in $\mathbf{S}_5$ è il sottogruppo ciclico $\langle\sigma\rangle$. Dedurne che i 5-cicli si ripartiscono in due classi coniugate di $\mathbf{A_5}$ (benché essi siano tutti coniugati in $\mathbf{S_5}$).
Suggerimento: Usare gli esercizi 4 e 8.

10. Sia $\gamma \in \mathbf{S}_5$ un 3-ciclo. Mostrare che il centralizzante di γ in $\mathbf{S}_5$ ha ordine sei ed è isomorfo a $\mathbf{S_3}$, mentre il centralizzante di γ in $\mathbf{A}_5$ è il sottogruppo ciclico $\langle\gamma\rangle$. Dedurne che tutti i 3-cicli sono coniugati in $\mathbf{A}_5$.

11. Identificare Δ_4 ad un sottogruppo di $\mathbf{S_4}$ e determinare due elementi di Δ_4 che sono coniugati in $\mathbf{S_4}$ ma non in Δ_4.

12. Determinare esplicitamente le classi di coniugio di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, D_4 e verificare l'equazione delle classi.

13. Determinare il gruppo degli automorfismi interni di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, D_4.

14. Determinare il centro del gruppo delle matrici invertibili $GL_2(\mathbb{R})$.

15. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *caratteristico* se $\alpha(H) = H$, per ogni $\alpha \in Aut(G)$.

    Mostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale. Mostrare inoltre che un gruppo di Klein non ha sottogruppi caratteristici.

16. Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

17. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo di ordine 2. Mostrare che H è normale in G se e soltanto se H è contenuto nel centro di G.

18. Sia $\mathbf{H}$ il gruppo delle unità dei quaternioni.

    Determinare almeno un omomorfismo non nullo $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ ed applicare il Teorema di Omomorfismo.

19. Sia G un gruppo ciclico di ordine 4 e sia G' un gruppo di Klein. Determinare tutti i possibili omomorfismi $G \longrightarrow G'$ e $G' \longrightarrow G$.

20. Determinare tutti i possibili omomorfismi $\mathbf{H} \to \mathbf{D_4}$ e $D_4 \to \mathbf{H}$.

21. Se $(G, +)$ e $(G', +)$ sono gruppi commutativi, allora il sottoinsieme $\mathrm{Hom}(G, G')$ di $\mathcal{F}(G, G')$ costituito da tutti gli omomorfismi di G in G' è un gruppo commutativo rispetto all'operazione *somma puntuale* definita da

    $$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$

    (ed è un sottogruppo di $(\mathcal{F}(G, G'), +)$).

22. (Facoltativo) Si consideri l'applicazione

    $$\alpha : (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +) \longrightarrow \mathbb{Z}_m; \quad \phi \longrightarrow \phi([1]_n.$$

    Mostrare che:

    (a) α è un omomorfismo di gruppi iniettivo;

    (b) $\mathrm{Im}(\alpha)$ è il sottogruppo di $\mathbb{Z}_m$ generato da $[m/d]_m$, dove $d = MCD(n, m)$. Dedurne che $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +)$ è un gruppo ciclico di ordine $d = MCD(n, m)$.

23. Determinare esplicitamente i gruppi $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{30}, \mathbb{Z}_{21}), +)$ e $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_{30}), +)$.

24. Determinare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_{24}$.

25. Sia G il gruppo delle matrici quadrate invertibili di ordine 2 a coefficenti reali. Sia

    $$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$$

    Si stabilisca se H è un sottogruppo normale di G e si provi che è il centralizzante dell'elemento $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

26. (<u>Facoltativo</u>) Sia $A \in GL_2(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale, cioè tale che $A^{-1} = A^t$.

Mostrare che esiste $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mostrare che, fissato nel piano euclideo reale un riferimento cartesiano, l'applicazione che associa ad ogni isometria piana che fissa l'origine la matrice corrispondente è un isomorfismo tra il gruppo delle isometrie del piano che fissano l'origine ed il gruppo ortogonale di grado 2, $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R})\,; A^{-1} = A^t\}$. Inoltre, in questo isomorfismo, il gruppo ortogonale speciale di grado 2, $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R})\,; det(A) = 1\}$, corrisponde al sottogruppo delle rotazioni attorno all'origine.

Mostrare che $SO_2(\mathbb{R})$ è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$ di indice 2.

Dedurne che:

$$O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R}).$$

Perciò le isometrie del piano che non sono rotazioni si ottengono tutte componendo una rotazione ρ con la riflessione τ rispetto all'asse delle ordinate e di conseguenza sono tutte riflessioni rispetto ad una retta passante per l'origine.

Infine mostrare che, per ogni riflessione σ ed ogni rotazione ρ, esiste una rotazione ρ' tale che $\sigma\rho = \rho'\sigma$.