AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 7 - 25/11/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

Esercizio 1
Siano I e J due ideali in un anello commutativo A. Dimostrare che:

- IJ, $I \cap J$, $I + J$ sono ideali di A;
- $IJ \subseteq I \cap J$;
- $(I \cup J) := \{\sum \alpha i + \beta j | \alpha, \beta \in A, i \in I, j \in J\}$ è un ideale;
- $I + J = (I \cup J)$;
- se $I + J = A$ allora $IJ = I \cap J$.

Esercizio 2
Si consideri l'insieme:

$$A = \left\{ \frac{m}{1+2n}, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

. Dimostrare che A con le usuali operazioni di somma e moltiplicazioni tra numeri è un anello commutativo. Determinare $U(A)$ e dimostrare che $A - U(A)$ è un ideale di A.

Esercizio 3
Sia $A = M_n(K)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a entrate in un campo K.
Dimostrare che $\forall M \in A$ si ha che M è invertibile oppure M è zero-divisore.
Mostrare con un esempio che ciò non è vero se al posto di K si prende $\mathbb{Z}$.

Esercizio 4
Un elemento a di un anello si dice idempotente se $a^2 = a$. Sia R un anello commutativo e unitario e $a \in R$, mostrare che:

- Se a è nilpotente allora a è uno zero-divisore;
- Se a è idempotente allora $1 - a$ è idempotente;
- Se a è idempotente e $a \neq 1$ allora a è uno zero-divisore;
- Se a è nilpotente e $a \neq 0$ allora a non è idempotente;
- Se a è zero-divisore allora lo è anche ab $\forall b \in R$;
- Se a e b sono nilpotenti allora anche $a + b$ è nilpotente;
- Se a è nilpotente allora lo è anche ab $\forall b \in R$;
- Se $u \in U(R)$ e a è nilpotente allora $u + ab$ è invertibile $\forall b \in R$.
- $Nil(R) = \{$elementi nilpotenti di R$\}$ è un ideale;
- $Z(R) = \{$elementi zero-divisori di R$\}$ non è un ideale;

Esercizio 5

Un anello A si dice booleano se $\forall a \in A$ si ha che $a^2 = a$. Dato A anello booleano dimostrare che:

- A è commutativo e $2a = 0\ \forall a \in A$ (A ha caratteristica 2).
- Se A è diverso da $\{0, 1\}$ allora A non è un campo.
- Dato un insieme X, mostrare che l'insieme delle parti $(P(X), +, *)$ è un anello ed è booleano con le operazioni definite come:

$$Y + Z := (Y \cup Z) - (Y \cap Z)$$

$$Y * Z := Y \cap Z$$

Esercizio 6

Sia $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

(1) Provare che R è un anello commutativo unitario

(2) R è un sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$?

(3) R è un campo?

Esercizio 7

Sia $H = \left\{ \begin{pmatrix} z & \bar{w} \\ -w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$

(1)Provare che H è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$

(2)H è commutativo?

(3)Descrivere il gruppo degli elementi invertibili di H.

Esercizio 8

Sia A un anello, $\forall a \in A$ l'annullatore destro di a è definito come: $Ann(a) := \{x \in A \mid ax = 0\}$

(1) Provare che $Ann(a)$ è un ideale di A.

(2) Trovare un esempio con $A = \mathbb{Z}_n$ in cui $\exists a$ tale che $a \in Ann(a)$.

(3) Se $A = M_2(\mathbb{R})$ trovare l'annullatore destro di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9

Nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi sia definita la seguente relazione:

$\forall z, w \in \mathbb{C}, z \sim w$ se la parte reale di $z - w$ è nulla.

(1) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

(2) Si descriva la classe di equivalenza del numero $z = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^2$.

(3) Si dimostri che la relazione $\sim$ è compatibile con l'addizione di $\mathbb{C}$.

(4) La classe di equivalenza di 0 è un ideale di $\mathbb{C}$?