AL210 - prof.ssa Gabelli
Tutorato 9 - 09/12/2013
Tutori: Lorenzo Guerrieri

Esercizio 1
Sia K un campo, $\alpha \in K$ e $f(x) \in K[x]$, dimostrare che $\phi : K[x] \to K$, tale che $\phi(f(x)) := f(\alpha)$ è un ben definito omomorfismo, determinarne nucleo e immagine e applicare il Teorema Fondamentale di Omomorfismo.

Esercizio 2
Sia X una indeterminata. Si dica se l'ideale principale (X) in $\mathbb{Z}[X]$ e' un ideale primo o massimale. Si dimostri che :

- (X) e' un ideale primo di $A[X] \iff A$ e' un dominio d'integrità;
- (X) e' un ideale massimale di $A[X] \iff A$ e' un campo.

Esercizio 3
Fattorizzare su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ i seguenti polinomi:

- $f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 12$
- $g(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 6$
- $h(x) = x^4 - x^2 - 1$

Esercizio 4
Si considerino $A[X]$ e $f(x), g(x) \in A[X]$ definiti di seguito. Si determini $d(x) := MCD(f(x); g(x))$ e due polinomi $a(x)$ e $b(x) \in A[X]$ tali che $d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$ nei casi :

- $A := \mathbb{Q}$; $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$; $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$;
- $A := \mathbb{Z}_2$; $f(x) = x^7 + 1$; $g(x) = x^3 + x$;
- $A := \mathbb{R}$; $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$; $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$;
- $A := \mathbb{C}$; $f(x) = x^{10} + 7x^5$; $g(x) = 2x^7 + 4x$.

Esercizio 5
In $\mathbb{Z}[i]$ si fattorizzi nel prodotto di irriducibili $\alpha := 13 + 5i$ e $\beta := 8 + 9i$, si calcoli $MCD(\alpha, \beta)$ e si scriva l'identità di Bezout.
Si determini $(\alpha) \cap (\beta)$ e $(\alpha) + (\beta)$.
Infine si stabilisca se i quozienti $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(\alpha)}$ e $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(\beta)}$ sono domini di integrità e se α è invertibile in $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(\beta)}$.

Esercizio 6
Effettuare la divisione euclidea in $\mathbb{Z}[i]$ tra $13 + 18i$ e $5 + 3i$ e calcolarne MCD e identità di Bezout.

Esercizio 7

Si consideri l'insieme $J := \{m + i \cdot n | n, m \text{ pari } \} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.

- Si dimostri che J è un ideale principale e si trovi un generatore in $\mathbb{Z}[i]$.
- Si dica se J è primo o massimale.
- Si descrivano gli elementi dell'anello quoziente $A := \dfrac{\mathbb{Z}[i]}{J}$ classificando gli invertibili e i divisori dello zero.

Esercizio 8

Siano D un dominio a fattorizzazione unica ed $\alpha \in D$ un elemento non nullo e non invertibile. Supponendo che $\alpha = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ sia la fattorizzazione in primi di α, si dimostri che l'anello quoziente $A := \dfrac{D}{(\alpha)}$ ammette elementi nilpotenti non banali se e solo se esiste $1 \leq i \leq s$ tale che $e_i \geq 2$.

Esercizio 9

Sia I l'ideale principale generato da 5. Stabilire se I è primo in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Z}[i]$ e trovare in entrambi gli anelli un massimale che lo contiene.

Esercizio 10

Sia $f(x) = x^2 - 2$. Stabilire se $I = (f(x))$ è primo o massimale nei seguenti anelli: $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][X]$, $\mathbb{Z}[i][X]$, $\mathbb{Z}_6[X]$ e $\mathbb{Z}_3[X]$.