Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 5
25 ottobre 2016

1. Sia $\phi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che, se $g, h \in G'$ sono nell'immagine di ϕ, allora $\phi^{-1}(g)$ e $\phi^{-1}(h)$ hanno la stessa cardinalità.

2. Sia $\phi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che, per ogni $g \in G$, l'ordine di $\phi(g)$ divide l'ordine di g.

3. Sia G un gruppo, e sia $\mathrm{Aut}(G)$ l'insieme degli *automorfismi* di G, ovvero degli isomorfismi di G in sé.
   a) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(G)$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.
   b) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(S_3) \simeq S_3$.
   c) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3$.

4. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ è isomorfo al gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_n$.

5. Sia ϕ la mappa
$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ x &\longmapsto e^{2\pi i x}\end{aligned}$$
   a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
   b) Dimostrare che $\ker\phi = \mathbb{Z}$.
   c) Dimostrare che l'immagine di ϕ è $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
   d) Dedurne che $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
   e) Dedurne che $\mathbb{C}_\infty \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dove $\mathbb{C}_\infty$ è l'insieme delle radici dell'unità.

6. Sia G un gruppo finito di ordine dispari e sia $n \geq 3$. Dimostrare che ogni omomorfismo da S_n a G è banale.

7. Un sottogruppo H di G è detto *caratteristico* se $\phi(H) \subseteq H$ per ogni $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$.
   a) Dimostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale.
   b) Dimostrare che il centro di G è un sottogruppo caratteristico.
   c) Trovare un esempio di un sottogruppo caratteristico H e un omomorfismo $\phi : G \longrightarrow G$ tale che $\phi(H) \nsubseteq H$.

8. Dati due gruppi $(G, \star)$ e $(G', *)$, sia $\hom(G, G')$ l'insieme degli omomorfismi di G in G'. Sia $+$ l'operazione su $\hom(G, G')$ definita come

$$(\phi + \psi)(x) := \phi(x) * \psi(x) \quad \text{ per ogni } x \in G.$$

   a) Dimostrare che $(\hom(G, G'), +)$ è un gruppo. Qual è il suo elemento neutro?
   b) Dimostrare che, se G' è commutativo, lo è anche $\hom(G, G')$.
   c) $\mathrm{Aut}(G)$ è un sottogruppo di $\hom(G, G)$?

9. Calcolare $\hom(\mathbb{Z}_2, S_3)$ e $\hom(\mathbb{Z}_2, D_4)$.

10. Siano a e b numeri interi.
    a) Dimostrare che $\hom(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}_b) = \{e\}$ se a e b sono coprimi.
    b) Determinare il numero di omomorfismi suriettivi da $\mathbb{Z}_a$ a $\mathbb{Z}_b$.
    c) Determinare il numero di omomorfismi iniettivi da $\mathbb{Z}_a$ a $\mathbb{Z}_b$.
    d) Dimostrare che $\hom(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}_b)$ è sempre un gruppo ciclico e calcolare la sua cardinalità.
    e) Determinare esplicitamente gli elementi di $\hom(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6)$.

11. Sia D_4 il gruppo diedrale di ordine 4.
    a) Determinare tutti i sottogruppi di D_4 e specificare quali sono normali.
    b) Determinare il quoziente D_4/N per ogni sottogruppo normale N.
    c) Determinare il gruppo degli automorfismi di D_4.
    d) Determinare tutti gli omomorfismi di D_4 in D_4.