Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 9
9 dicembre 2016

1. Determinare se i seguenti ideali sono primi e/o massimali:

   a) $6\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$
   b) $2\mathbb{Z}\times 5\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
   c) $13\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
   d) (X^2+2X+2) in $\mathbb{Q}[X]$
   e) (X^2+2X+2) in $\mathbb{C}[X]$
   f) (X,Y) in $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$
   g) $3\mathbb{Z}[X]$ in $\mathbb{Z}[X]$
   h) $(3,X)\mathbb{Z}[X]$ in $\mathbb{Z}[X]$
   i) $(X,X+1)$ in $\mathbb{Q}[X]$
   j) (X^2) in $\mathbb{R}[X]$
   k) (X^2-1) in $\mathbb{Q}[X]$
   l) (X^3+X+1) in $\mathbb{Z}_5[X]$
   m) $3\mathbb{Z}_{(3)}$ in $\mathbb{Z}_{(3)} := \{a/b \mid a,b\in\mathbb{Z}, 3 \text{ non divide } b\}$
   n) $(\overline{X},\overline{Y})$ in $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2,XY,Y^3)$

2. Determinare gli ideali primi e i massimali di $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{60}$ e $\mathbb{Z}_{65}$.

3. Siano P,Q ideali primi, e supponiamo che $P\nsubseteq Q$ e $Q\nsubseteq P$.
   a) Dimostrare che $P\cap Q$ non è un ideale primo.
   b) Dimostrare che $\mathrm{rad}(P\cap Q)=P\cap Q$.

4. Sia A un anello commutativo. Dimostrare che ogni ideale primo contiene il radicale dell'ideale (0).

5. Sia $A := \left\{\dfrac{a+bi\sqrt{3}}{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. Verificare gli A è un sottoanello di $\mathbb{C}$ e dimostrare che il gruppo delle sue unità è ciclico e finito.

6. Sia $f_a(X) := X^2+aX+3\in\mathbb{Z}_7[X]$.
   a) Determinare per quali valori di a il polinomio f_a è irriducibile.
   b) Determinare per quali valori di a il polinomio f_a genera un ideale primo.
   c) Dimostrare che, per questi valori di a, il quoziente $\mathbb{Z}_7[X]/(f_a)$ è un campo contenente propriamente $\mathbb{Z}_7$, e che in esso f_a ha una radice.
   d) Determinare l'inverso di $X+(f_a)$.

7. Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[X]$.

a) Dimostrare che l'ideale I dei polinomi con tutti i coefficienti multipli di 5 è un ideale principale di $\mathbb{Z}[X]$.

b) Dimostrare che I è un ideale primo, ma non massimale.

c) Sia J l'ideale dei polinomi il cui termine noto è un multiplo di 5: dimostrare che J è un ideale massimale e determinare il quoziente $\mathbb{Z}[X]/J$.

8. Sia p un numero primo, e siano $A := M_2(\mathbb{Z})$, $A_p := M_2(\mathbb{Z}_p)$, $I_p := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in p\mathbb{Z}\}$.
   a) Mostrare che A_p non è un corpo.
   b) Mostrare che A_p non ha ideali bilateri propri.
   c) Mostrare che $A_p \simeq A/I_p$.
   d) Dedurne che I_p è un ideale massimale di A.

9. Sia A il prodotto diretto degli anelli $\mathbb{Z}_p$, per p che varia tra i numeri primi.
   a) Determinare se A è un anello unitario.
   b) Determinare se A è un dominio d'integrità.
   c) Determinare la caratteristica di A.
   d) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo unitario iniettivo $\mathbb{Z} \longrightarrow A$, e in caso affermativo esplicitarlo.

10. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi, e sia

$$B := \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p := \{(a_p)_{p \in \mathbb{P}} \mid a_p \neq 0 \text{ solo per un numero finito di primi}\}.$$

   a) Dimostrare che B è un anello.
   b) Determinare se B è un anello unitario.
   c) Determinare se B è un dominio d'integrità.
   d) Determinare la caratteristica di B.
   e) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo unitario iniettivo $\mathbb{Z} \longrightarrow B$, e in caso affermativo esplicitarlo.

11. Sia p un numero primo, e sia $G_p := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^{p^n} = 1 \text{ per un } n \in \mathbb{N}\}$. Sia $\circ$ l'operazione nulla, ovvero sia $z \circ w = 0$ per ogni $z, w \in G_p$. Dimostrare che $(G_p, \cdot, \circ)$ è un anello commutativo senza ideali massimali.

12. Dimostrare che ogni dominio d'integrità finito è un campo.