Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 10

1. Un omomorfismo di anelli unitari $f : A \longrightarrow A'$ tale che $f(1_A) = 1_{A'}$ si chiama un *omomorfismo unitario*.

   Dimostrare che:

   (a) Se f non è unitario, cioè $f(1_A) \neq 1_{A'}$, allora $f(1_A)$ è uno zero-divisore in A'.

   (b) Se f è unitario e $a \in A$ è invertibile, $f(a)$ è invertibile in A', con inverso $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

   (c) Se $f : A \longrightarrow A'$ è un omomorfismo di anelli unitari tale che f è suriettivo, oppure A' è un dominio integro, allora f è unitario e $f(\mathcal{U}(A)) \subseteq \mathcal{U}(A')$.

   (d) Se A è un anello unitario e B un suo sottoanello, B può non essere unitario, o avere unità diversa da quella di A. In questo secondo caso, la funzione dentità su B (inclusione), $id_{|B} : B \longrightarrow A\,;\,,\quad b \mapsto b$ è un omomorfismo non unitario.

   (ad esempio si può prendere $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $B := \mathbb{Z} \times \{0\}$. In questo caso, $1_A = (1, 1)$ e $1_B = (1, 0)$).

2. Si considerino in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gli ideali $n\mathbb{Z} := (n) = \{nz, z \in \mathbb{Z}\}$:

   Descrivere i quozienti di $\mathbb{Z}$ con gli ideali $(3), (7), (9), (21)$ stabilendo quali di essi sono campi e quali domini e calcolarne la caratteristica.

3. Siano A e B anelli commutativi unitari e sia $\pi : A \to B$ un omomorfismo suriettivo.

   Mostrare che la corrispondenza $Q \to \pi^{-1}(Q)$ è una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di B e gli ideali primi di A contenenti $Ker(\pi)$.

4. Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che se ogni ideale $I \neq A$ è primo, allora A è un campo.

5. Sia $A = \mathbb{Z}_{(15)} := \{\frac{m}{15^t} \in \mathbb{Q}\,;\ m, t \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$.

   (a) Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

   (b) Determinare gli elementi invertibili di A.

   (c) Se I è un ideale (risp. ideale primo) di A, provare che $I \cap \mathbb{Z}$ è un ideale (risp. ideale primo) di $\mathbb{Z}$.

   (d) Provare che $\forall p \neq 3, 5$, con p primo, $(p) = pA$ è un ideale massimale di A e $(p) \cap \mathbb{Z}$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}$.

   (e) Provare che se $I \neq J$ sono ideali di A, allora $I \cap \mathbb{Z} \neq J \cap \mathbb{Z}$.

6. Sia $A := \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_5$ e sia

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow A\,; \quad x \mapsto ([x]_7, [x]_5).$$

   (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli e determinarne il nucleo.

   (b) Determinare $\phi^{-1}([5]_7, [2]_5)$.

   (b) Dimostrare che gli unici ideali primi di A sono:

$$P := [0]_7 \times \mathbb{Z}_5 \text{ e } Q := \mathbb{Z}_7 \times [0]_5$$

   Determinare inoltre $\phi^{-1}(P)$ e $\phi^{-1}(Q)$ e stabilire se essi sono ideali primi di $\mathbb{Z}$.

7. Sia A un dominio euclideo rispetto alla valutazione $v : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Mostrare che

   (a) $v(1) \leq v(a)$, per ogni $a \in A^*$.

   (b) $a \in A^*$ è invertibile se e soltanto se $v(a) = v(1)$.

   (c) Se a e b sono associati in A, allora $v(a) = v(b)$.

   (d) Se $a, b \in A^*$ sono tali che a divide b e $v(a) = v(b)$, allora a e b sono associati.

   (e) Se $a, b \in A^*$ e b non è invertibile, allora $v(a) < v(ab)$.

8. Effettuare la divisione euclidea di $13 + 18i$ per $5 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

9. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $5 + 3i$ e $13 + 18i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

10. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1+3i)$ e $J = (3-3i)$. Determinare gli ideali $I + J$, IJ e $I \cap J$.

11. Si considerino $A[X]$ e $f(x), g(x) \in A[X]$ definiti di seguito. Si determini $d(x) := MCD(f(x); g(x))$ e due polinomi $a(x)$ e $b(x) \in A[X]$ tali che $d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$ nei casi :

    - $A := \mathbb{Q}$; $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$; $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$;
    - $A := \mathbb{Z}_2$; $f(x) = x^7 + 1$; $g(x) = x^3 + x$;
    - $A := \mathbb{R}$; $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$; $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$;
    - $A := \mathbb{C}$; $f(x) = x^{10} + 7x^5$; $g(x) = 2x^7 + 4x$.