Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 11

1. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ è un campo.

2. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } a + bi + (p) \to \bar{a} + \bar{b}X + (X^2+1)$$

   è un isomorfismo di anelli.

   Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio X^2+1 è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$.

3. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}.$$

4. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:

$$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$

5. Sia $t \in \mathbb{Z}$ tale che $\mid t \mid$ non abbia fattori quadratici e sia $\mathbb{Z}[\sqrt{t}] = \{a + b\sqrt{t} \ \mid a; b \in \mathbb{Z}\}$. Se $\alpha = a + b\sqrt{t}$, definiamo la *norma* di α come $N(\alpha) = (a + b\sqrt{t})(a - b\sqrt{t}) = a^2 - b^2 t$.

   Mostrare che:

   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

   (b) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$;

   (c) $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

   (d) $\alpha, \beta \in Z[\sqrt{t}]$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

   (e) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $Z[\sqrt{t}]$;

   (f) 7 è irriducibile in $Z[\sqrt{5}]$ (benché $N(7) = 49$ non sia primo).

6. Determinare i fattori irriducibili di 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

7. Determinare i fattori irriducibili di 8 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

8. Dimostrare che, nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, gli elementi 5 e $2+i\sqrt{6}$ hanno massimo comune divisore uguale ad 1 , ma per 1 non esiste una identità di Bezout.

   Dimostare poi che gli elementi 10 e $4+2i\sqrt{6}$ non hanno massimo comune divisore.

   L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ è a fattorizzazione unica?

9. Fattorizzare su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ i seguenti polinomi:

   - $f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 12$
   - $g(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 6$
   - $h(x) = x^4 - x^2 - 1$

10. Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne Nucleo ed Immagine:

    $\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}\ ; f(X) \to f(0);$

    $\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\ ; f(X) \to \overline{f(0)};$

    $\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\ ; \sum a_i X^i \to \sum \overline{a_i} X^i;$

    $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}\ ; f(X) \to f(i);$

    $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}\ ; f(X) \to f(\sqrt[3]{2}).$

11. Sia $R := A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :

    (a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2 - 1)$; (b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3 + X + 1)$;

    (c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2 + 2)$; (d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3 + X + \bar{1})$.

    Determinare inoltre gli ideali massimali di R .

12. Studiare l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2 + aX + \bar{1})}$, determinando per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}_5$ esso è un campo.

    Determinare inoltre tutti gli ideali di A nei casi in cui $a = \bar{0}$ e $a = \bar{1}$.

13. Siano $f(X) = X^3 + aX^2 + \bar{5}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$ e $I = (f(X))$.

    Determinare se l'anello quoziente $Z_7[X]/I$ è un campo per i valori $a = \bar{4}$ e $a = \bar{5}$. In caso affermativo determinare l'inverso della classe del polinomio $g(X) = X^2 + \bar{2}$.

14. Stabilire se l'ideale principale generato da 5 è primo in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Z}[i]$. Determinare poi in entrambi gli anelli un ideale massimale che lo contiene.

15. Sia $f(x) = x^2 - 2$. Stabilire se $I = (f(x))$ è primo o massimale nei seguenti anelli: $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][X]$, $\mathbb{Z}[i][X]$, $\mathbb{Z}_6[X]$ e $\mathbb{Z}_3[X]$.

16. Dimostrare che il polinomio $Y^n + XY^{n-1} + X^2Y^{n-2} + \cdots + X^{n-1}Y + X$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X, Y]$.