Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 2

1. Sia G un gruppo tale che $x^2 = 1$, per ogni $x \in G$. Provare che G è commutativo.

2. Dimostrare, per induzione su n, che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Z}_2^n$ ha ordine 2.

3. Sia G un gruppo finito. Provare che:

   (a) L'insieme $A = \{x \in G \mid x^2 \neq 1\}$ ha un numero pari di elementi;

   (b) Se l'ordine di G è pari, allora G ha almeno un elemento di ordine 2.

4. Determinare tutti gli elementi di ordine 2, 3, 4 di S_4. Esistono elementi di ordine diverso?

5. Nel gruppo $GL_2(\mathbb{R})$ siano

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Determinare l'ordine di a e l'ordine di b. Mostrare poi che l'ordine di ab è infinito.

6. Siano A un insieme e $(G, \cdot)$ un gruppo. Indichiamo con $\mathcal{F}(A, G)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \longrightarrow G$.

   Mostrare che:

   (a) $(\mathcal{F}(A, G), \cdot)$ è un gruppo con l'operazione definita nel seguente modo: se $f, g \in \mathcal{F}(A, G)$, allora $fg : A \longrightarrow G$ è l'applicazione definita da

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

   (b) Se G è finito, ogni $f \in \mathcal{F}(A, G)$ ha ordine finito.

7. Siano a, b elementi di un gruppo G di ordine n e m rispettivamente. Mostrare che se $ab = ba$ e $MCD(m, n) = 1$, allora ab ha ordine mn.

8. Siano p e q due interi coprimi. Provare che il sottogruppo $\langle \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \rangle$ di $(\mathbb{Q}, +)$ è ciclico, generato da $\frac{1}{pq}$.

9. Determinare i generatori di $(\mathbb{Z}_n, +)$ per $n = 5, 12, 26$.

10. Verificare che i seguenti gruppi sono ciclici e determinare tutti i loro generatori: $U(\mathbb{Z}_{10}), U(\mathbb{Z}_{11}), U(\mathbb{Z}_{25})$.

11. Determinare il reticolo dei sottogruppi di $(\mathbb{Z}_n, +)$ per $2 \leq n \leq 20$.

12. Determinare il reticolo dei sottogruppi del gruppo C_n delle radici complesse n-sime dell'unità per $2 \leq n \leq 20$.

13. Mostrare che il gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ ha un sottogruppo di ordine 4 che non è ciclico.

14. Siano $(G, *)$ e $(G', *')$ due gruppi. Mostrare che: (a) $G \times G'$ è un gruppo con l'operazione componente per componenete definita da
$$(g, g')(h, h') = (g * h, g' *' h').$$
Inoltre $G \times G'$ è commutativo se e soltanto se lo sono G e G'.

    (b) Se $g \in G$ ha ordine n e $g' \in G'$ ha ordine m, allora $(g, g') \in G \times G'$ ha ordine $mcm(n, m)$.

    (c) Se G è ciclico di ordine n e G' è ciclico di ordine m, allora $G \times G'$ è ciclico se e soltanto se $MCD(n, m) = 1$. In tal caso determinare i suoi generatori.

    (d) Se $G \times G'$ è ciclico, allora G e G' sono ciclici. In questo caso, come si possono determinare tutti i sottogruppi di $G \times G'$?

15. Verificare che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ è un gruppo ciclico rispetto alla somma sulle componenti. Esplicitare i suoi generatori e determinare tutti i suoi sottogruppi.

16. Determinare il reticolo dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$.

17. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia S un sottoinsieme di G. Il più piccolo sottogruppo di G contenente S si chiama il *sottogruppo di G generato da S* e si indica con $\langle S \rangle$. Mostrare che
$$\langle S \rangle = \{s_1^{z_1} \dots s_n^{z_n}\, ; s_i \in S, z_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \dots, n\}.$$

18. Mostrare che S_n è generato da uno qualsiasi dei seguenti sottoinsiemi:
    (1) tutti i cicli;   (2) tutte le trasposizioni.
19. Determinare il sottogruppo di S_4 generato da (24) e (1234).