Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 3

1. Mostrare che i seguenti sottoinsiemi di $M(n,\mathbb{R})$ sono gruppi rispetto alla moltiplicazione righe per colonne:

   - $Gl(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R});\, detA \neq 0\}$ (*gruppo lineare generale di grado* n);

   - $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R});\, detA = 1\}$ (*gruppo lineare speciale di grado* n);

   - $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R});\, A^{-1} = A^t\}$ (*gruppo ortogonale di grado* n);

   - $SO(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n,\mathbb{R})$ (*gruppo ortogonale speciale di grado* n).

2. Calcolare l'ordine delle seguenti permutazioni:
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 8 & 2 & 3 & 10 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 9 & 10 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Determinare l'ordine di tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{30}$.

4. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{30}$.

5. Calcolare l'ordine dei seguenti elementi nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi:
   $$1+i, \quad -1, \quad -i, \quad \cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5), \quad \sqrt{3}/2 + 1/2.$$

6. Determinare il gruppo delle radici n-sime dell'unità per $n = 3, 4, 5, 6, 12$.

   Verificare che tale gruppo è ciclico e determinare i suoi generatori.

7. Siano G un gruppo ciclico finito di ordine n , $d > 0$ un divisore di n e $H = \{x \in G; x^d = 1\}$. Provare che H è un sottogruppo di G di ordine d.

8. Provare che il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è ciclico.

9. Sia H il sottogruppo di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generato da $(1,1)$ e $(0,2)$. Provare che

   (a) H non è un sottogruppo ciclico.

   (b) H non è prodotto diretto di due sottogruppi di $\mathbb{Z}$.

10. Siano H e K due sottogruppi finiti di un gruppo G. Provare che se gli interi $|H|$ e $|K|$ sono primi tra loro, allora $H \cap K = \{e\}$.

11. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostrare che l'insieme $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ax + by\,;\; x, y \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di $\mathbb{Z}$ e determinare un suo generatore.

12. Sia G un gruppo moltiplicativo e sia
    $$Z(G) := \{x \in G\,; xg = gx \ \text{ per ogni } \ g \in G\}.$$
    Mostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo normale di G. $Z(G)$ si chiama il *centro* di G.

13. Determinare il centro di S_3, D_4, H (gruppo delle unità dei quaternioni).
14. Sia K un campo. Determinare il centro di $GL_2(K)$.
15. Siano G e G' due gruppi e sia $G \times G'$ il loro prodotto diretto, con l'usuale operazione sulle componenti. Mostrare che $Z(G \times G') = Z(G) \times Z(G')$.