Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 4

1. Determinare tutti i sottogruppi, e le loro relative classi laterali, dei seguenti gruppi verificando il teorema di Lagrange: $(Z_{18}, +)$; $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$.

2. Sia $G = \Big\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\Big\}$.

   (a) Mostrare che G è un gruppo con l'operazione $\cdot$ definita come: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$

   (b) G è abeliano?

   (c) Dopo aver verificato che $H = \Big\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Q}, a \neq 0\Big\}$ è un sottogruppo di G, descriverne le classi laterali destre e sinistre.

3. Mostrare che il gruppo ortogonale speciale di grado n su $\mathbb{R}$, $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,; \det(A) = 1\}$, è un sottogruppo normale di indice 2 del gruppo ortogonale $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,; A^{-1} = A^t\}$.

4. Siano:
   $N = \Big\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\Big\}$; $\quad H = \Big\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ab \neq 0\Big\}$
   Dimostrare che N e H sono sottogruppi di $GL_2(\mathbb{R})$, N è normale in H, H non è normale in $GL_2(\mathbb{R})$.

5. Si considerino i seguenti sottogruppi di $\mathbf{A_4}$:
   $$H := \langle(12)(34)\rangle; \quad V_4 := \langle(12)(34), (14)(23)\rangle.$$
   Si dimostri che H è normale in V_4, V_4 è normale in $\mathbf{A_4}$ ma H non è normale in $\mathbf{A_4}$.

6. Sia $H := \{\sigma \in S_4 \;\; \sigma(1) = 1\}$.

   (a) Verificare che H è un sottogruppo di S_4 e descriverne le classi laterali destre e sinistre.

   (b) Stabilire se H è normale in S_4.

7. Mostrare che ogni sottogruppo del gruppo $\mathbf{H}$ delle unità dei quaternioni è normale.

8. Sull'insieme $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca l'operazione $\cdot$ ponendo per ogni $(x, y, z), (u, v, w) \in G$
   $$(x, y, z) \cdot (u, v, w) = (x + (-1)^z u,\; y + v,\; z + w)$$
   (a) Dimostrare che G con questa operazione è un gruppo non abeliano.

   (b) Dimostrare che il sottoinsieme $N = \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}$ di G è un sottogruppo normale di G e che $G/N \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   (c) Calcolare il centro di G.

9. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo di ordine 2. Mostrare che H è normale in G se e soltanto se H è contenuto nel centro di G.

10. Sia G un gruppo commutativo e sia ρ la relazione su G definita ponendo, per ogni $x, y \in G$;
$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow (xy^{-1})^2 = e.$$
(a) Provare che ρ è una relazione di equivalenza.

(b) Verificare che $[e]_\rho$ è un sottogruppo normale di G.

(c) Assumendo che $[e]_\rho = \{e\}$, determinare $[x]_\rho$ per ogni $x \in G$.

11. Sia $G = \{x + iy\,;\; x, y \in \mathbb{Z}\}$ e sia $f : (G, +) \longrightarrow (G, +)$ l'applicazione definita da $f(x + iy) = x + y$.

(a) Provare che l'applicazione f è un endomorfismo di G;

(c) Determinare nucleo ed immagine di f.

(b) Dimostrare che $\ker(f)$ è ciclico e trovare un suo generatore.

12. Verificare che l'applicazione
$$f : (M_2(\mathbb{Z}), +) \to (\mathbb{Z}, +)\,; \quad f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$
è un omomorfismo di gruppi.

Determinare $\ker(f)$ e descrivere il gruppo quoziente $M_2(\mathbb{Z})/\ker(f)$.

13. Determinare tutti i possibili omomorfismi
$$S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_6\,; \quad \mathbb{Z}_6 \longrightarrow S_3.$$