Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 5

1. Mostrare che, se H è un sottogruppo di $\mathbf{S_n}$ che contiene una permutazione dispari, allora esattamente la metà delle permutazioni di H sono dispari (in particolare l'ordine di H è pari).

2. Sia $\mathbf{H}$ il gruppo delle unità dei quaternioni.

   Determinare almeno un omomorfismo non nullo $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathbf{4}}$ ed applicare il Teorema di Omomorfismo.

3. Sia G un gruppo ciclico di ordine 4 e sia G' un gruppo di Klein. Determinare tutti i possibili omomorfismi $G \longrightarrow G'$ e $G' \longrightarrow G$.

4. Determinare tutti i possibili omomorfismi $\mathbf{H} \to \mathbf{D_4}$ e $D_4 \to \mathbf{H}$.

5. Siano $(G, +)$ e $(G', +)$ gruppi commutativi. Mostrare che l'insieme costituito da tutti gli omomorfismi di G in G' è un gruppo commutativo rispetto all'operazione *somma puntuale* definita da

   $$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$

   Tale gruppo si indica con $\mathrm{Hom}(G, G')$.

   Determinare esplicitamente i gruppi
   $$(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{30}, \mathbb{Z}_{21}), +), \quad (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_{30}), +).$$

6. Determinare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_{24}$.

7. (<u>Facoltativo</u>) Si consideri l'applicazione

   $$\alpha : (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +) \longrightarrow \mathbb{Z}_m; \quad \phi \longrightarrow \phi([1]_n).$$

   Mostrare che:

   (a) α è un omomorfismo di gruppi iniettivo;

   (b) $\mathrm{Im}(\alpha)$ è il sottogruppo di $\mathbb{Z}_m$ generato dalla classe $[m/d]_m$, con $d = MCD(n, m)$.
   Dedurne che $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +)$ è un gruppo ciclico di ordine d.

8. (a) Mostrare che in un gruppo due elementi coniugati hanno lo stesso ordine.

   (b) Mostrare che due elementi x, y di un gruppo G sono coniugati se e soltanto se esistono $a, b \in G$ tali che $x = ab$ e $y = ba$.

   Dedurne che, per ogni $h, g \in G$, gli elementi hg e gh hanno lo stesso ordine.

9. In un gruppo infinito G, sia F l'insieme degli elementi che hanno un numero finito di coniugati distinti. Provare che F un sottogruppo normale di G.

10. Mostrare che se $\pi \in \mathbf{S_n}$ e $\gamma = (a_1, a_2, , a_r)$ è un r-ciclo, allora
    $$\pi \circ \gamma \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_r)).$$

    Dedurne che tutti gli r-cicli sono coniugati in $\mathbf{S_n}$.

11. (a) Verificare che la classe di coniugio di (123) in A_4 (attenzione, non in S_4 !) è composta da quattro elementi.

    (b) Determinare le classi di coniugio di A_4 e S_4. Inoltre, per ciascuna classe, determinare il centralizzante di un rappresentante della classe.

    (c) Determinare, utilizzando le classi di coniugio, i sottogruppi normali di A_4.

12. Sia $\sigma \in \mathbf{S}_5$ un 5-ciclo. Mostrare che il centralizzante di σ in $\mathbf{S}_5$ è il sottogruppo ciclico $\langle\sigma\rangle$. Dedurne che i 5-cicli si ripartiscono in due classi coniugate di $\mathbf{A_5}$, benché essi siano tutti coniugati in $\mathbf{S_5}$.

    (Ricordare che il numero degli n-cicli distinti di $\mathbf{S}_n$ è $(n-1)!$).

13. Determinare le classi di coniugio di $\mathbf{A}_5$ e verificare l'equazione delle classi.

    Ragionando sui possibili ordini, mostrare che nessun sottogruppo di $\mathbf{A}_5$ puó essere unione di classi coniugate. Quindi $\mathbf{A}_5$ non ha sottogruppi normali.

14. Identificare D_4 ad un sottogruppo di $\mathbf{S_4}$ e determinare due elementi di D_4 che sono coniugati in $\mathbf{S_4}$ ma non in D_4.

15. Determinare esplicitamente le classi di coniugio di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, D_4 e verificare l'equazione delle classi.

16. Determinare il gruppo degli automorfismi interni di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, D_4.

17. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *caratteristico* se $\alpha(H) = H$, per ogni $\alpha \in Aut(G)$.

    Mostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale. Mostrare inoltre che un gruppo di Klein non ha sottogruppi caratteristici.

18. Mostrare che un sottogruppo finito di un gruppo G che è unico del suo ordine è caratteristico.

19. Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

20. Sia D_6 il gruppo delle isometrie dell'esagono regolare. Mostrare che D_6 è isomorfo al sottogruppo G di $\mathbf{S}_6$ generato da $\delta = (26)(35)$ e $\rho = (123456)$.

    Determinare inoltre le classi coniugate di G.