Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 5

1. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono omomorfismi di gruppi e, nei casi affermativi, applicare il Teorema di Omomorfismo:

   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_5 \to \bar{a}_{15}$; $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_5 \to 3\bar{a}_{15}$;

   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_5 \to 5\bar{a}_{15}$; $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$; $\bar{a}_{15} \to \bar{a}_5$;

   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$; $\bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_5$; $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_{15}$;

   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$; $\bar{a}_{15} \to 5\bar{a}_{15}$; $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$;$\bar{a}_{15} \to 2\bar{a}_{15}$.

2. Dimostrare che non esiste alcun omomorfismo non banale $\mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.

3. Determinare esplicitamente tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$.

4. Determinare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_{24}$.

5. Determinare il gruppo degli automorfismi di C_{12} (gruppo delle radici 12-sime dell'unità).

6. Determinare il gruppo degli automorfismi di S_3. Mostrare che ogni automorfismo è interno.

7. Mostrare che il gruppo degli automorfismi del gruppo di Klein è isomorfo a S_3.

8. Determinare un automorfismo non interno del gruppo $\mathbb{H}$ delle unità dei quaternioni.

9. *Teorema Cinese dei Resti*: Siano $m, n \geq 2$ tali che $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$. Mostrare che l'applicazione

   $$\mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \quad [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n)$$

   è un isomorfismo di gruppi.

10. Verificare che D_4 non può essere prodotto diretto di due suoi sottogruppi.

11. Esplicitare un isomorfismo $D_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times S_3$.

12. Esplicitare un isomorfismo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

13. Verificare che $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{28})$ è prodotto diretto interno di due suoi sottogruppi.

14. Mostrare che, per ogni $n \geq 2$, i gruppi $\mathbb{Z}_{n^2}$ e $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ non sono isomorfi.

15. Come nella dimostrazione del Teorema di Cayley, costruire un omomorfismo iniettivo di $\mathbb{Z}_n$ in S_n.