Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 7

1. Sia $A = M_n(K)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a entrate in un campo K.

   Dimostrare che ogni matrice $M \in A$ è invertibile oppure è uno zero-divisore.

   Mostrare con un esempio che ciò non è vero se al posto di K si prende $\mathbb{Z}$.

2. Sia $A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

   Provare che A è un un campo, sottoanello commutativo di $M_2(\mathbb{R})$.

3. Sia $H := \left\{ \begin{pmatrix} z & \bar{w} \\ -w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$

   (a) Provare che H è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$.

   (b) H è commutativo?

   (c) Descrivere il gruppo degli elementi invertibili di H.

4. Sia ξ una radice primitiva n-sima dell'unità e sia

   $$\mathbb{Z}[\xi] := \{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1}\,;\, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

   Mostrare che $\mathbb{Z}[\xi]$ è un sottoanello del campo dei numeri complessi. (Per $\xi = i$, $\mathbb{Z}[i]$ si chiama l'*anello degli interi di Gauss*).

5. Si consideri l'insieme:

   $$A := \left\{ \frac{m}{1+2n}, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   Verificare che A con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazioni tra numeri è un anello commutativo unitario.

   Determinare $U(A)$ e dimostrare che $A \setminus U(A)$ è un ideale di A.

6. Siano I e J due ideali in un anello commutativo A. Verificare che:

   (a) $IJ := \{\sum_{finite} x_i y_i\,; x_i \in I,\, y_i \in J\}$, $I \cap J$,
   $I + J := \{x + y\,; x \in I,\, y \in J\}$ sono ideali di A;

   (b) $I + J := \langle I \cup J \rangle$ è il più piccolo ideale contenente $I \cup J$;

   (c) $IJ \subseteq I \cap J$ e se $I + J = A$ allora $IJ = I \cap J$.

7. Sia A un anello, l'annullatore destro di un elemento $a \in A$ è definito come: $Ann_d(a) := \{x \in A; ax = 0\}$. Analogamente si definisce l'annullatore sinistro di $a \in A$ come: $Ann_s(a) := \{x \in A; xa = 0\}$

   (a) Provare che $Ann_d(a)$ è un ideale destro di A e $Ann_s(a)$ è un ideale sinistro di A.

   (b) Se $A := M_2(\mathbb{R})$ trovare gli annullatori destri e sinistri di

   $$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (c) Descrivere gli annullatori degli elementi di $A = \mathbb{Z}_n$.

8. Sia A un anello e

$$Nil(A) = \{a \in A\,;\; a^n = 0,\ \text{per qualche } n \in \mathbb{N}\}$$

l'insieme degli elementi nilpotenti di A.

Mostrare che $Nil(A)$ è un ideale di A. ($Nil(A)$ si chiama il *nilradicale* di A).

9. Nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi sia definita la seguente relazione: $\forall z, w \in \mathbb{C}, z \sim w$ se la parte reale di $z - w$ è nulla.

   (a) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

   (b) Descrivere la classe di equivalenza del numero $z := (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^2$.

   (c) Dimostrare che la relazione $\sim$ è compatibile con l'addizione di $\mathbb{C}$.

   (d) Stabilire se la classe di equivalenza di 0 è un ideale di $\mathbb{C}$.

10. Sia K un campo e sia $I := \{f(X) \in K[X]\,; f(0) = 0\}$. Mostrare che I è un ideale di $K[X]$ e descrivere l'anello quoziente $K[X]/I$.

11. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}\,; \quad f(X) \mapsto f(i).$$

Mostrare che φ è un omomorfismo di anelli e determinarne il nucleo e l'immagine.

12. Considerare l'applicazione $\psi : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z}_8)$ tale che

$$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{a} \pmod 8 & \bar{b} \pmod 8 \\ \bar{c} \pmod 8 & \bar{d} \pmod 8 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che ψ è un omomorfismo di anelli e determinarne il nucleo e l'immagine.