Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 8

1. Si considerino in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = 126\mathbb{Z}$ e $J = 84\mathbb{Z}$. Determinare gli ideali $I + J$, $I \cap J$, IJ.

2. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{60}$. Determinare inoltre la struttura degli anelli quoziente $\mathbb{Z}_{60}/\bar{5}\mathbb{Z}_{60}$ e $\mathbb{Z}_{60}/\overline{15}\mathbb{Z}_{60}$. Quanti elementi hanno? Sono integri? Sono campi?

3. Sia A un anello commutativo unitario. Mostrare che $(a) = (ua)$, per ogni $u \in \mathcal{U}(A)$.

4. Sia S un insieme. Ricordiamo che l'insieme $\mathcal{P}(S)$ delle parti di S è un anello, con l'addizione definita dalla differenza simmetrica e la moltiplicazione definita dall'intersezione.
   (a) Sia $X \subseteq S$. Verificare che $\mathcal{P}(X) = X\mathcal{P}(S)$ è un ideale di $P(S)$.
   (b) Mostrare che l'insieme dei sottoinsiemi finiti di S è un ideale di $\mathcal{P}(S)$.

5. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi che non siano l'uno contenuto nell'altro non è un ideale primo.

6. Sia fissata la matrice : $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ e sia $I = \alpha^0$ la matrice identità di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
   Si consideri l'applicazione:
   $$\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \to \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i.$$
   Verificare che ϕ è un omomorfismo di anelli ed esplicitare $\mathrm{Im}(\phi)$ e $\mathrm{Ker}(\phi)$. Stabilire infine se $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

7. Sia $p(X) = X^2 + 3X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$:
   (a) Dimostrare che $K = \mathbb{Z}_7[X] / (p(X))$ è un campo.
   (b) Descrivere esplicitamente gli elementi di K.
   (c) Determinare l'inverso di $X^3 + \bar{5}X + \bar{6} + (p(X))$ in K.

8. Sia $v_3 : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da:
   $v_3(x) = n$ se 3^n divide x e 3^{n+1} non divide x.
   Posto
   $$A = \{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}\,; v_3(x) - v_3(y) \geq 0\} \cup \{0\},$$
   (a) Mostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;
   (b) Determinare il gruppo degli elementi invertibili di A;
   (c) Mostrare che $3A$ è l'unico ideale massimale di A.

9. Si consideri l'insieme $A = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ in cui sono definite le seguenti operazioni:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \ ; \quad (a, b)(a', b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b).$$

Rispetto a queste operazioni, A è un anello commutativo unitario con unità $1 = (1, 0)$.

(a) Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_7[X] \longrightarrow A \text{ definita da } \sum a_i X^i \to \sum (a_i, 0)(0, 1)^i$$

è un omomorfismo di anelli;

(b) Determinare Nucleo ed Immagine di φ ed applicare il Teorema di Omomorfismo per gli anelli;

(c) Usando il punto precedente, mostrare che A è un campo. Quanti elementi ha A?

10. Sia $A = \left\{ \frac{a}{b} : \ a, \, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \text{ e } 5 \not| b \right\}$

(a) Dimostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare gli elementi invertibili di A.

(c) Sia $\phi : A \to \mathbb{Z}_5$ definita da

$$\phi \left(\frac{a}{b} \right) = \overline{a} \overline{b}^{-1}.$$

Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di anelli e applicare il teorema di omomorfismo.

(d) Usando il punto 10b, mostrare che $\ker \phi$ è l'unico ideale massimale di A

11. Sia A un dominio e sia I un ideale di A. Mostrare che

(a) L'insieme $I[X]$ dei polinomi a coefficienti in I è un ideale di $A[X]$.

(b) Se P è un ideale primo di A, l'ideale $P[X]$ è primo in $A[X]$. In particolare, un elemento primo di A è primo anche in $A[X]$.

(Suggerimento: Considerare l'omomorfismo $A[X] \longrightarrow \frac{A}{P}[X]$ definito da $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \to (a_0 + P) + (a_1 + P)X + \ldots + (a_n + P)X^n$)

12. Mostrare che il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[X]$ è $\mathbb{Q}[X]$, cioè il campo delle funzioni razionali su $\mathbb{Q}$.