

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Prima prova di valutazione intermedia
8 Novembre 2016

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo additivo \mathbb{Z}_{12} . Mostrare inoltre che esistono due sottogruppi non banali H e K tali che \mathbb{Z}_{12} è isomorfo al prodotto diretto $H \times K$.
2. Sia G il gruppo delle unità di \mathbb{Z}_{997} . Determinare il gruppo degli automorfismi di G .
3. Siano G_1 e G_2 due gruppi di ordini 24 e 30, rispettivamente. Sia G un gruppo non commutativo isomorfo a un quoziente di G_1 e anche a un quoziente di G_2 . Provare che G è isomorfo a S_3 .
4. Sia $H = \{a+ib \in \mathbb{C}; a = b\}$. Provare che H è un sottogruppo additivo di \mathbb{C} e che il gruppo quoziente \mathbb{C}/H è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.
5. Costruire tutti gli omomorfismi di gruppi $\varphi : A_4 \rightarrow \mathbb{Z}_6$. Per ognuno di essi determinare inoltre il nucleo e l'immagine di φ e definire l'isomorfismo canonico $\bar{\varphi} : \frac{A_4}{\text{Ker } \varphi} \rightarrow \text{Im } \varphi$.
6. Sia $n \geq 3$ un numero dispari. Dimostrare che esistono due n -cicli di S_n che non sono coniugati in A_n . Che succede se n è pari?
(Ricordare che il numero degli n -cicli distinti di S_n è $(n-1)!$)