Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Seconda prova di valutazione intermedia
10 Gennaio 2017

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

Scrivere il proprio nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato

1. Si consideri l'applicazione
$$\alpha : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,; \quad (M, v) \mapsto Mv.$$
Dimostrare che α è un'azione transitiva di gruppi.

2. Determinare gli ideali primi dell'anello quoziente $\frac{\mathbb{Z}}{\langle 60 \rangle}$.

3. Si consideri il sottoinsieme
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ 3y & x \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$
dell'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

   (1) Verificare che A è un anello.

   (2) Verificare che l'applicazione
$$f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_9\,; \quad \begin{pmatrix} x & 3y \\ 3y & x \end{pmatrix} \mapsto [x]_9$$
è un omomorfismo di anelli.

   (3) Determinare il nucleo $\mathrm{Ker}\, f$ e verificare che esso è un ideale principale.

   (4) Stabilire se $\mathrm{Ker}\, f$ è un ideale primo di A.

4. Sia $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ l'anello degli interi di Gauss e sia $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ l'ideale generato da $\alpha = -5 + 12i$.

   (1) Stabilire se le classi modulo I degli elementi $\beta = -1+5i$ e $\gamma = 3-5i$ sono invertibili nell'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/I$.

   (2) Mostrare che A ha un unico ideale proprio non nullo J.

   (3) Stabilire se A/J è un campo.

5. Dato un anello A, sia $\operatorname{Aut}(A)$ l'insieme degli automorfismi di A, ovvero degli isomorfismi di A in sé.

   (1) Dimostrare che $\operatorname{Aut}(A)$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.

   (2) Dimostrare che l'unico automorfismo di $\mathbb{Z}_n$ (come anello) è l'identità.

   (3) Dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Z}[i] &\longrightarrow \mathbb{Z}[i] \\ a+bi &\longmapsto a-bi \end{aligned}$$

   è un automorfismo di $\mathbb{Z}[i]$.

6. Sia I il sottoinsieme di $\mathbb{Z}[X]$ formato dai polinomi $f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ tali che $25 | a_0$ e $5 | a_1$.

   (1) Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.

   (2) Stabilire se I è un ideale primo e/o massimale.

   (3) Dimostrare che I non è un ideale principale.