Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Appello A
25 Gennaio 2017

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

Scrivere il proprio nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato

1. Siano $\sigma := (12)(34)(123)(35)$ e $\tau := (341)(23)(12)$ elementi di S_5.

   (1) Scrivere σ e τ come prodotto di cicli disgiunti.

   (2) Stabilire se σ e τ appartengono ad A_5.

   (3) Determinare $\tau^{-1}\sigma\tau$.

2. Determinare tutti gli automorfismi del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}, +)$. Verificare inoltre che tale gruppo è ciclico e determinare i suoi generatori.

3. Sia Q il gruppo delle unità dei quaternioni e sia H il suo centro.

   (1) Dimostrare che Q/H è un gruppo di Klein.

   (2) Dimostrare che H è l'unico sottogruppo di Q di ordine 2.

   (3) Stabilire se esiste un omomorfismo suriettivo $Q \longrightarrow \mathbb{Z}_4$.

4. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$.

   (1) Determinare la caratteristica di A.

   (2) Determinare gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti di A.

   (3) Determinare gli ideali di A precisando quali sono primi e quali massimali.

5. Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{x+y\sqrt{5}\,;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$. Se $\alpha := a+b\sqrt{5} \in A$, definiamo $N(\alpha) = a^2 - 5b^2$ e sia $M := \{\alpha \in A\,;\ N(\alpha) \in 2\mathbb{Z}\}$.

   Verificare che M è un ideale massimale di A e descrivere l'anello quoziente $\frac{A}{M}$.

6. Siano $f(X) := (X^2 - 2)^2 \in \mathbb{Q}[X]$, $I := \langle f(X) \rangle$ l'ideale generato da $f(X)$ e $A := \frac{\mathbb{Q}[X]}{I}$.

   (1) Dimostrare che la classe $\overline{X+1}$ è invertibile in A e calcolare il suo inverso.

   (2) Dimostrare che l'insieme degli elementi non invertibili di A è un ideale e stabilire se esso è un ideale primo o/e massimale.