Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Appello B
17 Febbraio 2017

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

Scrivere il proprio nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato

1. Sia H l'insieme delle permutazioni $\sigma \in S_5$ tali che $\sigma(1) = 1$ oppure $\sigma(1) = 2$.

   (1) Dimostrare che H *non* è un sottogruppo di S_5.

   (2) Determinare il sottogruppo generato da H.

2. Sia $G := \mathcal{U}(\mathbb{Z}_7)$ il gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_7$.

   (1) Verificare che G è ciclico ed elencare i suoi generatori.

   (2) Determinare gli endomorfismi di G.

3. Sia $G := D_4$ il gruppo diedrale di grado 4 (o delle isometrie del quadrato).

   (1) Determinare il reticolo dei sottogruppi normali di G.

   (2) Determinare il gruppo $Int(G)$ degli automorfismi interni di G.

4. Su $\mathbb{Q}[X]$ sia $\oplus$ l'operazione definita da

   $$(a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n)\oplus(b_0+b_1X+\cdots+b_nX^n) := a_0b_0+a_1b_1X+\cdots+a_nb_nX^n.$$

   (1) Dando per noto che $\mathbb{Q}[X]$, con le operazioni $+$ e $\oplus$, è un anello (che chiamiamo A), dimostrare che A non è unitario né integro.

   (2) Dimostrare che, per ogni intero non negativo n, l'applicazione

   $$\begin{aligned} \phi_n \colon \mathbb{Q} &\longrightarrow A \\ q &\longmapsto qX^n \end{aligned}$$

   è un omomorfismo iniettivo di anelli la cui immagine è un ideale di A.

   (3) Dimostrare che ogni elemento f di A è contenuto in un sottoanello unitario di A.

5. Sia I l'ideale generato da 7 in $\mathbb{Z}[i]$.

   (1) Stabilire se I è un ideale primo e/o massimale.

   (2) Determinare un insieme di rappresentanti delle classi di equivalenza di $\mathbb{Z}[i]$ modulo I, e calcolare la cardinalità di $\mathbb{Z}[i]/I$.

   (3) Esiste un ideale J di $\mathbb{Z}$ tale che $\mathbb{Z}/J \simeq \mathbb{Z}[i]/I$?

6. Sia $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito nel seguente modo: se $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$

$$\varphi(f(X)) := \left(f(\frac{1}{2}), f(0) \right)$$

   (1) Trovare il nucleo e l'immagine di φ.

   (2) Stabilire se l'anello quoziente $\mathbb{Q}[X]/Ker(\varphi)$ è integro.

   (3) Applicare a φ il Teorema Fondamentale di omomorfismo.