Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Appello C
12 Giugno 2017

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

Scrivere il proprio nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato

1. Sia G il gruppo S_5, delle permutazioni su 5 elementi.
   (a) Determinare tutti gli elementi di G di ordine 2 e tutti gli elementi di ordine 5.
   (b) Trovare un sottogruppo di G di ordine 10 e stabilire se tale gruppo è normale in G oppure no.

2. Sia D_8 il gruppo diedrale di grado 8. Sappiamo che $D_8 = \langle \sigma, \tau \rangle$, dove σ ha ordine 8 e τ è un elemento ordine 2 tale che $\tau \notin \langle \sigma \rangle$.
   (a) Dimostrare che $H := \langle \sigma^2, \tau \rangle$ è un sottogruppo normale di D_8.
   (b) Determinare un sottogruppo normale non banale di D_8 contenuto in H e un sottogruppo di H che è normale in H ma non in D_8.

3. Sia G il gruppo delle radici ottave dell'unità.

   Determinare il gruppo $Aut(G)$ degli automorfismi di G e stabilire se $Aut(G)$ è un gruppo ciclico.

4. Siano X un insieme, K un campo e $A := K^X := \{f : X \longrightarrow K\}$ l'insieme delle funzioni su X a valori in K. Sappiamo che A è un anello con le operazioni puntuali, definite da:

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

   Per ogni $f \in A$, sia $Z(f) := \{x \in X \,;\, f(x) = 0\}$ l'insieme degli zeri di f.

   (a) Mostrare che f è invertibile se e soltanto se $Z(f) = \emptyset$, cioè f non ha zeri.
   (b) Mostrare che ogni elemento non invertibile è uno zerodivisore.
   (c) Mostrare che f è idempotente, cioè $f = f^2$, se e soltanto se $f(x) = 1$ per ogni $x \notin Z(f)$.

5. Sia $A := \mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e sia I un ideale di A diverso da (0).

   (a) Dimostrare che $I \cap \mathbb{Z} \neq (0)$.

   (b) Dimostrare che il quoziente A/I è finito.

   (c) Determinare tutti gli elementi di A/I per $I = (2+i)A$.

6. Siano $p(X) := X^2 - 5$ e $q(X) := X^5 - 2X^3 + X^2 - 15X - 10$ due polinomi in $\mathbb{Q}[X]$.

   (a) Dimostrare che $p(X)$ è irriducibile.

   (b) Determinare un generatore per gli ideali $I := (p(X)) \cap (q(X))$ e $J := (p(X)) + (q(X))$.

   (c) Verificare se gli anelli quoziente $\mathbb{Q}[X]/I$ e $\mathbb{Q}[X]/J$ sono campi e/o domini.