Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

AL210 - Algebra 2 - Tutorato I

Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: M. Cepale, A. Galoppini

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti insiemi, con le operazioni di somma e prodotto usuali, sono dei gruppi. Dire eventualmente quali degli assiomi di gruppo sono soddisfatti e quali no.

$$A := \left\{n^2 | n \in \mathbb{N}\right\} \quad B := \left\{\frac{n^2}{m^2} | n, m \in \mathbb{N} \, e \, MCD(n,m) = 1\right\}$$

Esercizio 2. Sia X un insieme. Definiamo su $P(X)$ l'operazione di differenza simmetrica:

$$A\Delta B \ := \ (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$$

Dimostrare che $(P(X), \Delta)$ è un gruppo, e calcolare l'ordine di un generico elemento di $P(X)$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo, e sia $\{H_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi.
a) Dimostrare che $\bigcap_{i \in I} H_i$ è un sottogruppo di G.
b) Dimostrare che $H_i \cup H_j$ è un sottogruppo di G $\iff$ $H_i \subset H_j$ oppure $H_j \subset H_i$.

Esercizio 4. Un elemento a di un anello si dice idempotente se $a^2 = a$ e nilpotente se $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n = 0$. Sia R un anello commutativo unitario e $a \in R$, mostrare che:

- Se a è nilpotente allora a è uno zero-divisore;
- Se a è idempotente allora $1 - a$ è idempotente;
- Se a è idempotente e $a \neq 1$ allora a è uno zero-divisore;
- Se a è nilpotente e $a \neq 0$ allora a non è idempotente;
- Se a è zero-divisore allora lo è anche $ab, \forall b \in R$;
- Se a e b sono nilpotenti allora anche $a + b$ è nilpotente;
- Se a è nilpotente allora lo è anche ab, $\forall b \in R$;
- Se $u \in U(R)$ e a è nilpotente allora $u + ab$ è invertibile $\forall b \in R$;
- Fornire un esempio di zero-divisore non nilpotente.

Esercizio 5. Dire se $(U(\mathbb{Z}_{25}), \cdot)$ e' un gruppo ciclico, e in caso affermativo determinarne i generatori. Elencare tutti i suoi sottogruppi e dire quali di essi sono ciclici.

<u>Esercizio 6.</u> Scrivere le seguenti permutazioni di S_9 come prodotto di cicli disgiunti. Determinarne inoltre l'ordine e la parità.

$$(143)(2531)(24) \quad (176)(914) \quad (23)(21)(24) \quad (13579)(2468)$$
$$(1653)(4368)(879) \quad (13)(1435)(7986)(123)$$

<u>Esercizio 7.</u> Sia $(G, \cdot)$ un gruppo tale che $x^2 = 1 \; \forall x \in G$. Si dimostri che G è abeliano.

<u>Esercizio 8.</u> Dimostrare che A_4 non ammette sottogruppi di ordine 6.

<u>Esercizio 9.</u> Sia $G := (U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ e sia $G' := (U(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$. Si provi che sono isomorfi.